Educación Matemática Núm. 20 Vol. 1

Fecha: Abril de 2008

Páginas: 22 Clave de compra: C201-02 Resumen:

Se presenta el análisis del proceso de solución de dos problemas con fracciones, así como el análisis de la interacción efectuada en una situación de aprendizaje coopeperativo principalmente por dos alumnos de secundaria con bajo aprovechamiento. Los resultados mostraron algunas problemáticas de los alum-nos con respepecto al concepepto de fracción y la conservación del entero, así como una interpretación deficiente del problema, la cual los condujo al uso de algoritmos inadecuados para la solución. Se identificaron tres concepciones que obstaculizaron el proceso de solución de los alumnos: en un problema con fracciones el valor del entero siempre es uno, al resultado se llega con una sola operación y la única cantidad mencionada en el problema equivale al entero. Las problemáticas fueron superadas durante la interacción entre alumnos y tutor. Autores:

Miguel Ángel Parra Álvarez - Alumno de doctorado en el programa de Psicología Educativa y del Desarrollo, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Rosa del Carmen Flores Macías - Profesora de tiempo completo, Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, México

Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones

Miguel Ángel Parra Álvarez

Rosa del Carmen Flores Macías

Palabras clave: Alumnos con bajo aprovechamiento, problemas matemáticos, fracciones, comunidad de aprendizaje, secundaria.

Resumen.

El aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la solución de problemas es un proceso que requiere de maestros y alumnos la adopción de formas de interacción que promueva en los alumnos la comprensión de los problemas y con ello exploren diversas formas de solución. En este estudio se presenta un análisis cualitativo de los significados que alumnos de secundaria con bajo aprovechamiento tenían de los conceptos relacionados con la fracción, los recursos que pusieron en juego durante la solución de problemas y las cualidades de la interacción suscitada entre ellos. Los resultados muestran ciertas problemáticas respecto a: a) el concepto de fracción relacionado con la conservación del entero, b) procedimientos rutinarios de operaciones con fracciones y su uso inadecuado cuando se mal interpreta el problema, c) algunas creencias que se desprenden de la interpretación del problema.

Abstract

The learning of the mathematics based in mathematic problems requires of teachers and students new ways of interactions that promote in students the

understanding of the problems and exploring diverse solution. In this study a qualitative analysis is presented about the fraction concepts meanings, the resources used during the solution of problems and the qualities of the interaction among students of secondary with low achievement. The results show certain problems regarding: a) the fraction concept related with the conservation of the integer, b) routine procedures of operations with fractions and their inadequate use, c) some beliefs that come off of the interpretation of the problem.

Marco teórico

El uso de problemas matemáticos dentro del salón de clases se ha propuesto como medio para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, así como para ampliar y consolidar sus conocimientos, habilidades y capacidades que los lleven a aplicar sus conocimientos matemáticos en la solución de problemas cotidianos (NCTM, 1995 citado en Santos, 1997; Schoenfeld, 1992; SEP, 1993).

El aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la solución de problemas es un proceso que requiere de maestros y alumnos la adopción de formas de interacción que lleven por un lado a los alumnos a comprender los problemas y explorar diferentes formas de solución, y por otro a los maestros a analizar y elegir los problemas que propone en clase tomando en cuenta el nivel de conocimientos de sus alumnos. Esto se plantea como alternativa a las prácticas de enseñanza meramente expositivas que enfatizan el aprendizaje de procedimientos matemáticos para su posterior aplicación a problemas. Se ha demostrado que los alumnos pueden realizar correctamente los algoritmos pero que este conocimiento no es suficiente para solucionar los problemas (Flores, 2005). En este sentido, se pretende que la enseñanza de las matemáticas deje de ser solamente expositiva y que por el contrario de la oportunidad a los alumnos a experimentar soluciones con la guía del maestro, quien por su parte elije y analiza los problemas que propone en su clase tomando en cuenta el nivel de conocimientos de sus alumnos.

El contexto en el que se enseñan las matemáticas es importante. Si el contexto de enseñanza promueve que el alumno discuta, establezca acuerdos respecto a los significados matemáticos, favorezca la expresión de sus puntos de vista y le permita experimentar soluciones, el alumno tiene mayor oportunidad de desarrollar su conocimiento. Las comunidades de práctica ofrecen este contexto pues promueven la constante interacción entre los alumnos. Si se parte del hecho de que las matemáticas son un producto social que permite compartir significados y que se aprenden por medio del intercambio social, entonces puede entenderse a la educación matemática como un proceso de socialización más que un proceso de mera transmisión de conocimientos que por estar descontextualizados, carecen de significado para el alumno (Resnick, 1988, citado en Schoenfeld, 1992). El trabajo entre pares permite a los alumnos internalizar procesos, organizar y retener ideas (Jones, Wilson y Bhojwani, 1997). Además, Durante la interacción, los conocimientos matemáticos individuales se externan y se vuelven públicos para ser criticados y reformulados, lo que a su vez conduce a nuevos conocimientos y a la creación de entendimientos compartidos sobre vocabulario y representaciones simbólicas (Ernest, 1998, Rivera, 1996). En este sentido el aprendizaje se entiende como un proceso y acto social donde el alumno se aproxima paulatinamente al comportamiento, vocabulario y conocimiento de una determinada comunidad de práctica, se privilegia el aprendizaje colaborativo y la responsabilidad compartida (Macías, 2003; Santos, 1997; Schoenfeld, 1992; y Torres, 1999). De tal manera que aprender matemáticas en un contexto social donde se experimenta su utilidad, resulta más significativo porque sirve de vehículo de comunicación y entendimiento entre los miembros de una sociedad.

De entre los temas que presentan mayor dificultad en el currículo mexicano se encuentra el aprendizaje de las fracciones y para entender esta problemática es necesario tomar en cuenta algunas propiedades de la fracción tales como (Mancera, 1992): a) la homonimia y sinonimia de la representación de la fracción, b) los diferentes modelos empleados en la enseñanza, c) el manejo operativo de la fracción.

a) Homonimia y sinonimia de la representación de la fracción. El símbolo a/b tiene asociados diversos significados (homonimia) que pueden hacer referencia a una fracción como parte-todo, o una razón o un número decimal. Además, el concepto de fracción puede representarse de diferentes formas (sinonimia) por ejemplo como cociente de enteros o como decimal (¼ puede representarse también como .25). Para Nunes y Bryant (1998) existe una brecha entre la comprensión infantil de los números racionales y la realización correcta de tareas con éstos debido a que los alumnos aprenden sólo algunos significados de las fracciones y no consideran otros.

b) Modelos para representar la fracción empleados en la enseñanza. Durante la enseñanza se hace uso de diferentes materiales para simbolizar la fracción (figuras geométricas, rectas numéricas, dibujos que representan a personas y objetos a repartir, etc.) a la par que se plantean problemas con diversos significados que no necesariamente se adaptan a estas formas de representación (por ejemplo se propone un problema de reparto pero se ha modelado la fragmentación de una figura geométrica). La situación se agudiza cuando se utilizan, además, indiferenciadamente los tipos de cantidades en las que se puede presentar la fracción (discreta o continua por ejemplo). Este uso arbitrario y confuso de los modelos se ha relacionado con la falta de dominio de las diferentes interpretaciones de la fracción por parte de algunos maestros (Piñón, 1995).

c) Manejo operativo de la fracción. Se ha encontrado (Nunes y Bryant, 1998) que alumnos de primaria, y varios de secundaria, poseen un conocimiento rudimentario de las fracciones pero aparentan comprenderlas ampliamente porque utilizan el vocabulario de términos fraccionarios y dominan ciertas partes de los procedimientos, pero no reconocen los problemas en los que pueden utilizarlos. Además, los alumnos tratan de aplicar su conocimiento sobre los números enteros para realizar operaciones de fracciones sin comprender las propiedades de las mismas. Por ejemplo, mientras que en operaciones con fracciones la obtención del común denominador involucra la reorganización de las cantidades originales, en los números enteros se hace uso del reagrupamiento (Mancera, 1992).

Si la comprensión del concepto fracción y sus modelos es de por sí problemática para alumnos regulares, en alumnos con bajo aprovechamiento la situación se complica. Investigaciones (Flores, 1999; Schoenfeld, 1992) han documentado deficiencias específicas en el área de matemáticas en alumnos con problemas de aprendizaje tales como: conocimientos matemáticos erróneos y fragmentados, razonamientos inconsistentes, errores frecuentes en la realización de operaciones, dificultad en la comprensión del texto del problema, falta de estrategias metacognoscitivas para dirigir el proceso de solución, ausencia de estrategias de apoyo como dibujos o diagramas, dificultad para identificar la fuente de errores. En relación al aprendizaje de las fracciones específicamente, además de las problemáticas mencionadas anteriormente, se encuentran otras en el desarrollo de procedimientos rutinarios (dificultad para encontrar un común denominador, confusión entre le procedimiento de multiplicación y división) y la dificultad para comprender la relación entre el numerador y el denominador, donde algunos alumnos afirman que una fracción es mayor que otra basándose solamente en la comparación de los denominadores como si fueran números enteros sin tomar en cuenta los numeradores (por ejemplo se afirma que 2/32 es mayor que 1/16 porque 32 es mayor que 16). Una problemática más es la dificultad para vincular los conocimientos formales con los cotidianos (Parra, 2004).

A pesar de las dificultades conceptuales implicadas en la comprensión de las fracciones, algunos alumnos intentan resolver problemas haciendo uso de los modelos pictóricos (gráficos, dibujos, etc.) que les son familiares y con ello prescinden de algoritmos formales. A la sustitución del algoritmo formal por dibujos se le conoce como algoritmo gráfico (Valdemoros, 1997). El uso de estos modelos es útil en el complejo proceso de entender la representación simbólica a/b de la fracción. Pero el uso del algoritmo gráfico, así como de los algoritmos formales, dependerá de la forma en que el alumno se represente el problema que esté resolviendo

Flores (2005), basándose en la teoría de los campos conceptuales, propone un modelo para analizar y comprender la evolución en las representaciones que los alumnos elaboran ante un problema. Se parte del análisis del conocimiento matemático que sustenta los razonamientos de los alumnos al entender y solucionar el problema, se toma en cuenta el empleo de símbolos o representaciones gráficas y simbólicas y el empleo de algoritmos. El modelo identifica cuatro etapas:

- Representación no canónica: La interpretación del problema es deficiente y la solución propuesta corresponde a un tipo diferente al que se plantea en el problema, lo que conduce a una solución errónea. Es decir, no se comprenden cabalmente las relaciones matemáticas implicadas en el problema y su solución, los alumnos utilizan un procedimiento que no corresponde a lo que el problema plantea.

- Representación canónica no algorítmica: la interpretación del problema es correcta y la solución se desarrolla mediante representaciones pictóricas sin llegar a utilizar un algoritmo formal que en el caso de las fracciones se diría que es sustituido por un algoritmo gráfico (Valdemoros, 1997).

- Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico: la interpretación del problema es correcta y conduce al alumno a utilizar conjuntamente algoritmos y representaciones pictóricas acordes al problema. Los algoritmos y representaciones pictóricas coinciden, pero puede ocurrir que los alumnos no logren explicar porqué los resultados son semejantes.

- Representación canónica algorítmica: El alumno comprende el problema y la relación que existe con el algoritmo a utilizar para llegar a la solución. El alumno puede prescindir de representaciones pictóricas haciendo uso del algoritmo formal.

Este modelo se ha adaptado para analizar la solución de problemas de fracciones por parte de alumnos de secundaria en el tema de fracciones.

El estudio

Considerando los antecedentes anteriores, el objetivo del presente estudio fue valorar la pertinencia y ventajas de la enseñanza en el contexto de una comunidad de práctica donde se promovió la interacción de alumnos para la solución de problemas matemáticos, para lo cual se presenta un análisis cualitativo de los significados que alumnos con bajo aprovechamiento tenían de los conceptos relacionados con la fracción, los recursos que pusieron en juego durante la solución de problemas y las cualidades de la interacción suscitada entre ellos.

Se trabajó en la comunidad de práctica durante 13 sesiones con duración de dos horas por sesión, los participantes fueron seis alumnos con bajo aprovechamiento que asistían a un programa de apoyo extra escolar. Los alumnos cursaban segundo año de secundaria y pertenecían a diferentes planteles. Su objetivo fue que los alumnos, a través de problemas matemáticos, consolidaran sus conocimientos relacionados con las fracciones. El programa fue coordinado por un tutor cuya función fue apoyar a los alumnos durante la resolución de los problemas.

Considerando las dificultades de los alumnos para estructurar su actividad cognoscitiva durante el proceso de solución, se les proporcionó una tarjeta auto instruccional que contiene una estrategia de solución, que los alumnos adaptaban o empleaban según sus necesidades, con los siguientes pasos (Flores, 1999; Parra, 2004): leo el problema, lo platico, digo la pregunta, busco los datos, hago un dibujo, escribo los datos en mi dibujo, busco una operación, escribo la operación, la resuelvo, la compruebo, verifico si ocupé todos los datos, escribo la respuesta.

En cada sesión los alumnos desarrollaban un problema en equipos o entre pares, se les daba tiempo para que lo resolvieran por sí mismos, el tutor intervenía cuando los alumnos daban señales de darse por vencidos y finalmente cada equipo exponía frente a todos su proceso de solución. A continuación se presenta el análisis de la solución de dos problemas de interpretación parte-todo.

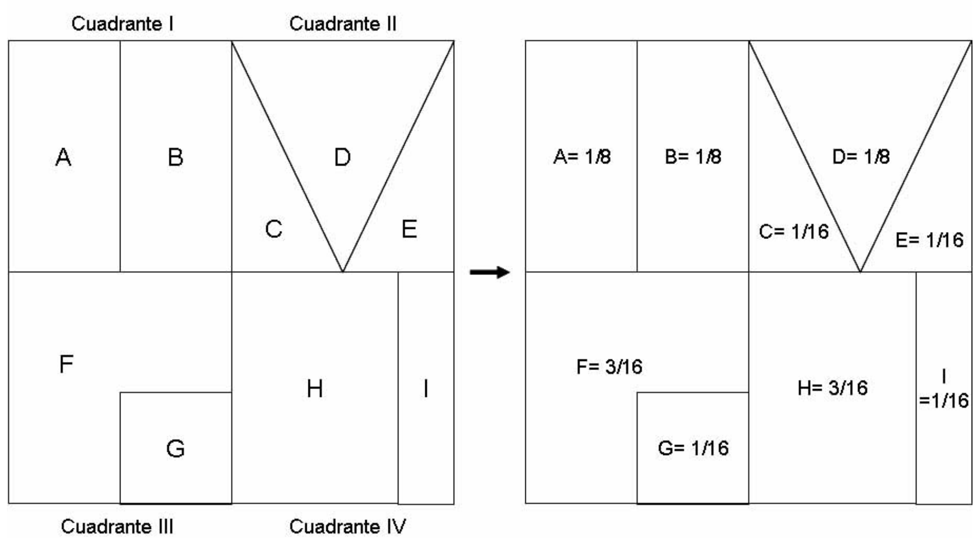
Problema 1

Se presentó a los alumnos un cuadro fraccionado donde debían encontrar el valor de cada una de las partes representadas con letras (en la figura 1 se muestra la solución, los títulos de "cuadrantes" no aparecieron en la hoja original, aquí se emplean para clarificar el diálogo entre los alumnos). En el problema, el significado de las fracciones es parte- todo: el valor del todo es uno y se encuentra contenido en una sola figura, las cantidades utilizadas son continuas. En esta situación un elemento conceptual esencial es la conservación del entero. Las investigaciones (Lima, 1982; citado en Nunes y Bryant, 1998) indican que los alumnos inexpertos no conservan el entero cuando se divide en partes diferentes y presentan dificultades para aceptar, por ejemplo, que un entero se conserva no importando si se divide en dos mitades o si se divide en cuatro cuartos. Además, la mayoría de los alumnos se centran en el número de partes en que se divide el entero pero no toman en cuenta el tamaño de las partes (Dávila, 1992).

El problema fue resuelto en pares, Nicolás y Raymundo trabajaron juntos. De acuerdo con las etapas planteadas por Flores (2005) en el momento de la solución Nicolás tiene conocimientos para una representación no canónica del problema, reconoce que un entero se divide en fracciones, pero la nueva fracción obtenida se convierte en un nuevo entero, esto es, no tiene conocimientos suficientes para entender la conservación del entero. Una estrategia que utiliza es la comparación del tamaño de las fracciones por medio de su percepción: algunas fracciones que tienen el mismo valor, pero diferente forma, las considera de valor diferente por el tamaño que percibe entre ambas. No puede sostener sus soluciones con argumentos sólidos, lo que lo conduce a hacer diferentes ensayos hasta encontrar uno que le satisfaga o incluso hasta descartar la posibilidad de una solución. Los algoritmos que emplea son utilizados de forma errónea.

Por su parte, Raymundo tiene conocimientos para una solución canónica algorítmica basada en una representación gráfica. Sus conocimientos le permiten entender la conservación del entero que se obtiene por la suma de las fracciones representadas. Para sostener sus argumentos, hace trazos que le permiten realizar un algoritmo gráfico y no considera necesarios los algoritmos formales que sin embargo utiliza si así se le pide. A continuación se presentan fragmentos del diálogo que sostuvieron ambos alumnos. Se transcriben las palabras tal como las mencionaron, pero debido a la complejidad del diálogo, se hacen anotaciones entre paréntesis y algunas figuras para aclarar la forma en que estructuraron su respuesta.

Figura 1: El cuadro fraccionado y su solución



Ambos alumnos dialogan sobre el cuadrante II (CDE). Raymundo, basado en sus conocimientos previos, dedujo el valor correcto de D (1/8) y los valores de C (1/16) y E (1/16). Por su parte Nicolás propuso valores en doceavos que no puede sostener con argumentos sólidos, Raymundo lo cuestiona sobre la validez de su respuesta. Nicolás intenta comprobar la afirmación de su compañero midiendo con su lápiz y encuentra que el vértice inferior del triangulo formado por D es el punto medio del cuadrante II:

Raymundo: Éste es 1/8 (D= 1/8).

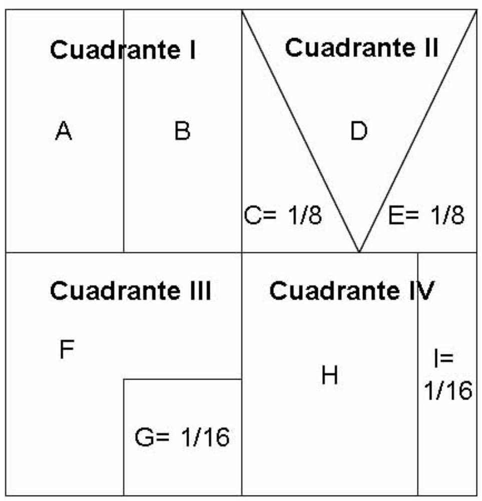
Nicolás: Éste es 1/12 (C= 1/12) *y éste 1/12* (E= 1/12) *y éste es 2/12* (D=2/12).

Raymundo: Pero éste está a la mitad (se refiere al vértice inferior del triángulo D, Nicolás mide con su lápiz para comprobarlo). *Si es la mitad entonces es 1/16 (C= 1/16) y éste es 1/16 (E= 1/16).*

Raymundo considera que los cuatro cuadrantes forman el entero y a su vez, las partes contenidas dentro de un cuadrante forman ¼. Por su parte Nicolás se guía por el tamaño percibido de las fracciones para darle un valor y como no puede sostener su respuesta, retira su argumento y discuten sobre la propuesta hecha por Raymundo abarcando otros cuadrantes (Figura 2):

Nicolás: Entonces éste es 1/16 (escribe G= 1/16) *y éste también es 1/16* (escribe I= 1/16)*, y éste es 1/8* (C= 1/8) *y éste es 1/8* (E= 1/8) *porque son más grandes.*

Figura 2: Solución de Nicolás



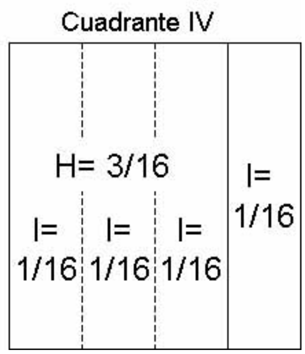
Aunque Nicolás retoma la propuesta de su compañero, se basa nuevamente en su percepción para asignar valores a las fracciones. Nicolás da muestra de su falta de entendimiento para conservar el entero como unidad, Raymundo se da cuenta de la confusión de su compañero e intenta explicar que cada cuadrante tiene valor de ¼ considerando que los cuatro forman la unidad, es decir resalta la conservación del entero:

Raymundo: Pero éste (señala el cuadrante II) *es ¼. Éste es 1/16* (I= 1/16)*, con éste* (señala H) *sería el cuarto* (se refiere a que H + I= ¼)*, faltaría el H nada más.*

Nicolás: ¿H = 1/16?

R: No. I = 1/16, falta H, en éste (H) *cabe éste* (I) *tres veces* (dibuja tres líneas verticales para dividir en tres partes a H) *y se suman* (figura 3).

Figura 3:
Solución de Raymundo



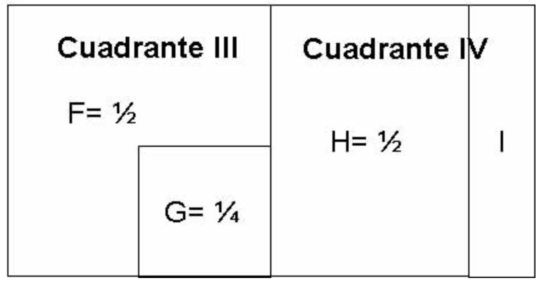
Raymundo tiene clara la conservación del entero, sabe que cada cuadrante equivale a una cuarta parte del entero y apoyándose con el trazo de líneas, intenta dar a entender que el cuadrante IV puede dividirse en cuatro partes iguales, y partiendo del valor de I= 1/16 deduce que H puede dividirse en tres segmentos I, de tal manera que H = 1/16 + 1/16 + 1/16 = 3/16. Sin embargo no pudo convencer a Nicolás y el problema sigue sin ser resuelto:

Nicolás: (Sin argumentar algo borra las líneas dibujadas por Raymundo).

Raymundo: Éste (I) *es 1/16*

Nicolás: (Refiriéndose a I) *Pero eso quiere decir que está agarrando una parte de 16* (señala todo el cuadro en su totalidad)*, pero éste* (F) *y éste* (H) *es ½; y este* (G) *es ¼* (figura 4).

Figura 4: Solución de Nicolás



Nicolás comienza a tratar a los cuadrantes como enteros independientes asignando a F y H el valor de un medio a cada uno, pero reconoce que G es una cuarta parte de F, por ello le asigna el valor de un cuarto (G= ¼). Nicolás no encuentra argumentos para sostener su propuesta y centra la discusión en el cuadrante III, retomando la propuesta inicial de Raymundo donde G= 1/16.

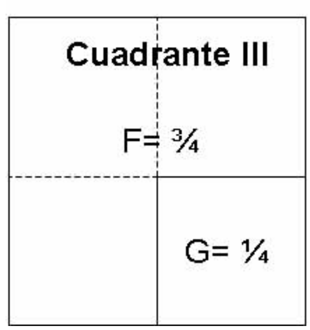
Nicolás: Éste vale 1/16 (señala G) *¿y éste?* (señala F).

Raymundo: Todo esto vale ¼ (señala el cuadrante III) *y éste* (G) *cabe tres veces aquí* (señala F).

Nicolás: Entonces éste (F) *vale ¾* (cambia el valor de F de ½ a ¾ como se muestra en la figura 5).

Raymundo: No. Son cuatro (traza líneas para dividir el cuadrante III en cuatro partes iguales) *es como aquí* (discuten el cuadrante IV nuevamente).

Figura 5: Solución de Nicolás



Raymundo continúa sin perder de vista la relación entre el cuadrante y el entero en su totalidad. Mientras que Nicolás no conserva el entero y continúa tratando al cuadrante como entero independiente de toda la figura, de ahí que retome la idea de su compañero y proponga que si el cuadrante III puede dividirse en cuatro partes iguales, entonces G= ¼; y los tres cuadros restantes, que forman a F equivaldrían a ¾. Nuevamente Nicolás no encuentra argumentos para explicar su punto de vista.

Los alumnos continúan trabajando en la tarea pero no logran ponerse de acuerdo. Cuando se les pide que expliquen a todo el grupo su solución, Nicolás continúa sin conservar el entero durante su explicación, el tutor identifica la problemática y por medio de preguntas a todo el grupo, se llega a la conclusión de que cada cuadrante tiene un valor de ¼ y con base en ello, Nicolás se anima a resolver el cuadro ante todo el grupo pero lo hace aplicando un algoritmo formal cuya utilización es errónea. En lugar de utilizar una división de fracciones, realiza una multiplicación (solución no canónica), pero además se hace presente la confusión del procedimiento de la multiplicación y división en todos los miembros del grupo, por ello, el tutor decidió retomar la propuesta inicial de realizar la multiplicación con el fin de que los alumnos recordaran el procedimiento de la multiplicación de un número entero y una fracción propia. Una vez hecho esto se le pide a Nicolás que realice la operación inicial y el alumno la resuelve bien, el resultado obtenido es 2/4 pero lo reduce incorrectamente a 1/8 debido a que escucha a Raymundo decir que el valor de A y B debe ser de 1/8 cada uno, pero Nicolás no puede argumentar su respuesta (figura 6).

Tutor: ¿Por qué es 1/8?

Nicolás: porque son dos cuartos (señala A y B).

Tutor: ¿Me lo puede demostrar?

Nicolás escribe en el pizarrón ¼ + ¼ = 2/4 (figura 6), se le apoya a reducir el término a ½, y se da cuenta de que no puede ser el valor del cuadrante I. Para sacar a Nicolás de su apuro, el tutor comienza a preguntar sobre cómo se obtuvieron los cuadrantes con el fin de que los alumnos se dieran cuenta de que la operación requerida era una división.

Tutor: Hace un momento puse el cuadro, ¿qué tuvimos que hacer para obtener los cuartos (todos los cuadrantes)?

David: Lo dividimos en cuatro.

Tutor: Muy bien. ¿Y qué hicimos para obtener la parte A y la parte B?

Raymundo: lo dividimos (al cuadrante I) *en dos*.

Tutor: Muy bien, entonces ¿que operación debemos realizar para saber el valor de A y B?

David: una división.

Raymundo: Tenemos que dividir ¼ entre 2.

Nicolás: No puede ser ½, (refiriéndose a su último resultado) *tenemos que dividir* (el cuadrante I) *entre dos.*

Tutor: ¡Ah!, ¡Tenemos que dividir!, antes dijiste que teníamos que multiplicar.

Nicolás: No…. Tenemos que dividir.

Tutor: Si dividimos éste cuarto (cuadrante I) *entre dos, ¿Cuánto vale A y cuánto B?*

Nicolás: 1/8.

Tutor: Muy bien, ahora demuéstramelo en el pizarrón.

Nicolás: Tenemos que dividir (escribe ¼ entre 2, resuelve la operación y obtiene 1/8 como se muestra en la figura 7) *cada una vale 1/8* (A y B). *¡Ah! Yo estaba multiplicando y se tiene que dividir*

Tutor: Muy bien.

Nicolás: Ya lo sabía, no me enseñaste nada.

Finalmente Nicolás continúa por su cuenta solucionando el cuadro hasta completar la tarea.

Figura 6: Solución por medio de una multiplicación

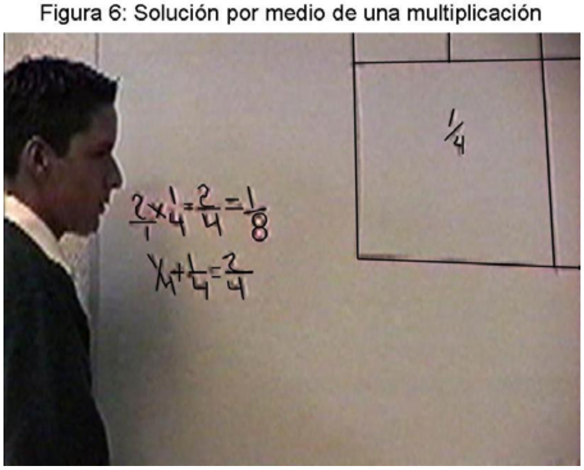


Figura 7: Solución por medio de una División

La interacción presentada se llevó a cabo entre dos alumnos que tienen diferentes representaciones del concepto de fracción, por un lado Nicolás con una representación no canónica y por el otro Raymundo con una representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmica (utilizó en un principio un algoritmo gráfico). La actividad puso de manifiesto ciertas invariantes de los alumnos (Flores, 2005) en el uso del concepto que se mantuvieron a lo largo de la interacción. Por un lado, Raymundo no perdió la conservación del entero y utilizó representaciones gráficas para explicar su punto de vista a Nicolás, quien por su parte no poseía la conservación del entero. Sin embargo, el desarrollo de la actividad colocó a Nicolás en una situación de conflicto, al intenta hacer públicas sus soluciones para ser valoradas y con ello buscar nuevos argumentos para sostenerlas pero no logra que Raymundo le comprenda por lo que comienza a considerar otra posible solución (Ernest, 1998). Cuando el conocimiento de cada uno se puso de manifiesto fue de gran utilidad para Raymundo para detectar la problemática de su compañero e intentar explicarle su punto de vista con sus propios recursos.

Además, comprender qué significado estaban dando los alumnos al problema, sirvieron al tutor para que: a) comprendiera la conceptuación que los alumnos tenían de la fracción con respecto al entero: para Raymundo un entero puede dividirse en fracciones, de la misma manera, una fracción puede dividirse en otras fracciones más y la suma de éstas siempre es un entero. Mientras que para Nicolás, un entero puede dividirse en fracciones, pero cada una de ellas se convierte en un nuevo entero que también es posible fraccionar. b) Diera los apoyos necesarios para que los alumnos comprendieran el concepto de fracción y que los llevara a la solución del problema. La correcta solución del problema no es en sí mismo el objetivo de los apoyos, sino promover el desarrollo que los alumnos tienen de un concepto matemático para pasar de una fase inicial de representación no canónica hasta una más desarrollada.

Problema 2

Se presentó a los alumnos un problema parte-todo tomado de un libro de texto de matemáticas de secundaria (Waldegg, Villaseñor y García, 1998; pp. 79-80) cuya solución no es obvia ni directa. Se presenta la cantidad ¼ como único dato numérico, los demás se encuentran implícitos y son los alumnos quienes deben representarlos, pero el entero es completamente desconocido. El valor del entero a encontrar puede hacer referencia a una cantidad discreta si el resultado final (cuatro litros) se considera como cuatro elementos independientes. También puede hacer referencia a una cantidad concreta si se considera que los cuatro litros se encontraban en un mismo un recipiente, ésta última opción fue la utilizada por los alumnos como se verá más adelante. El texto del problema fue el siguiente:

- ¡Cómo! ¿Ya no hay leche? - preguntó la madre asombrada-. Si ayer compré suficiente para la cena.

-La mitad la usó la abuela para el arroz con leche – dijo Rosita.

-Bueno, yo usé la mitad de la que quedó, para los licuados esta mañana- dijo Martha.

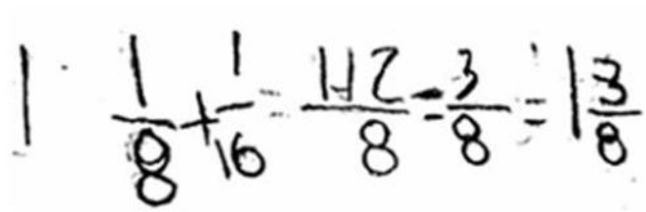
-Acuérdate que al medio día ocupaste la mitad de la que había para el flan- aclaró Javier.

-Y yo me tomé la mitad de la que quedaba esta tarde, mientras veía la televisión- agregó Juanito.

-¿Y solo queda ¼ de litro?- preguntó el padre-, pues ¿cuánto compraste ayer?

El problema fue solucionado en equipos de tres alumnos, en la figura 8 se muestra la primera solución de un equipo y posteriormente el diálogo que entablan los alumnos y el tutor. Inicialmente, los alumnos dan una solución no canónica: realizaron una adición de fracciones basados en una interpretación que no correspondía a lo que el problema pedía. Al interactuar con el tutor, los alumnos no pueden sostener su solución. Cabe destacar también que existen problemas en el procedimiento formal en la suma de fracciones en la obtención del común denominador.

Figura 8: Primera solución



El tutor comienza por preguntar la forma en que llegaron a esa solución:

Raymundo: El problema dice que quedaba un cuarto, pero se tomó la mitad, entonces la mitad de ¼ es 1/8 y el problema dice que se volvió a tomar la mitad, y sacamos la mitad de 1/8 que es 1/16 después sumamos las fracciones y nos dio 1 3/8.

Tutor: Veo que colocaron al principio de su suma el número uno ¿Por qué lo pusieron?

Nicolás: Porque es un litro.

Tutor: Bien. ¿El problema menciona en algún lado un litro? (leen el problema nuevamente en silencio).

Elías: No. Pero se supone que está hablando de un litro, porque de ahí fueron tomando leche.

Tutor: Ustedes dan por hecho que había un litro ¿verdad?

Todos: Si.

A pesar que en estos momentos los alumnos son capaces de reconocer el valor de una fracción cuando se divide a la mitad, su comprensión del problema presenta una dificultad. La argumentación hace referencia a una concepción de los alumnos donde creen que en un problema de fracciones siempre debe haber un entero como dato explícito a partir del cual se comienza a fragmentar, quizá por esa razón los alumnos comenzaron con ¼ como si tratara del entero inicial y lo comenzaron a dividir en otras fracciones, y esta misma concepción pudo haberlos llevado a añadir en su operación “el litro”, con valor de uno, que “siempre” aparece en los problemas.

Un aspecto importante que es necesario resaltar, es que el problema, a pesar de contener valores fraccionarios y narración cotidianos, su solución requiere de un procedimiento en retrospectiva, esto es, debe dejarse de pensar en un valor inicial del cual se comienza a fraccionar el entero, lo que involucra dividir las fracciones a la mitad, y en su lugar se requiere sumar el doble de las fracciones que se obtienen. Esta forma de proceder, como se muestra a continuación, fue posible gracias al uso de un algoritmo gráfico.

Después de la argumentación de los alumnos, el tutor les pide que justifiquen su algoritmo pero no lo logran porque parten de argumentos inconsistentes. Al no encontrar respuesta el tutor intenta que los alumnos vinculen sus conocimientos cotidianos con el problema y con ello valoren la posibilidad de otra solución:

Tutor: Sin embargo, su resultado final dice que compraron 1 3/8. ¿Cuál es la respuesta correcta un litro o un litro y tres octavos? (los alumnos piensan y no responden). *¿Es posible que en la tienda nos vendan 1 3/8 de leche?*

Nicolás: No… Entonces la respuesta correcta es un litro.

Tutor: Dime Nicolás, ¿Cuántos litros de leche llegan a comprar normalmente en tu casa para toda la familia?

Nicolás: Como tres.

T: ¡Eso es! Entonces no necesariamente debe haber solamente un litro en el problema. ¿Qué les parece si comprobamos su respuesta?

Los alumnos vuelven a trabajar por su cuenta y en una segunda solución vuelven a su algoritmo y se dan cuenta del error que cometieron en el procedimiento y aunque esta vez lo resuelven bien, no les convence la respuesta (1 3/16). En una tercera solución buscan otros datos numéricos en el problema y vuelven a su planteamiento de transformar ¼ considerándolo como si fuera el entero, pero se dan cuenta que volverán al algoritmo inicial que no es una opción correcta de solución. Antes de que los alumnos se desanimaran e intentaran una cuarta solución, el tutor interactúa con los alumnos y los guía en el uso de la tarjeta auto instruccional, que no habían tomado en cuenta hasta el momento. Al llegar al paso

5 “hago un dibujo”, los alumnos comienzan a intercambiar ideas, y el tutor se aleja para supervisar el avance del otro equipo. Momentos después obtienen la respuesta correcta haciendo uso solamente de un algoritmo gráfico consistente a lo que pedía el problema (figura 9). Esto es, los alumnos llegaron a una representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico.

Figura 9: Solución por medio de un algoritmo gráfico

El tutor entonces pide al equipo que justifique su solución frente al grupo

Tutor: ¿Cómo llegaron a este resultado?

Raymundo: Como no sabemos el total de litros, dibujamos un entero y lo fuimos dividiendo como lo decía el problema, y le pusimos el nombre de las personas que tomaron leche y al final nos quedó el cuarto que sobró.

*Nicolás: Al final vimos que el cuarto (*¼*) se parecía a lo que Juanito se había tomado, entre los dos daba como resultado ½, y sumándolo con lo que se tomó Javier nos da un litro, que es lo mismo que usó la mamá, eso quiere decir que llevamos dos* (litros) *y con lo de la abuela nos salieron cuatro litros.*

En esta ocasión, los alumnos resolvieron el problema analizándolo en retrospectiva, comenzaron con un todo desconocido que fueron dividiendo según la narración del problema, hasta llegar a ¼ como la porción más pequeña. A partir de ella y con apoyo de su dibujo y su conocimiento de la transformación de fracciones hicieron cálculos para obtener el resultado final, pero esta vez las fracciones no fueron divididas a la mitad, sino que fueron sumadas por sí mismas.

Con la intención de que los alumnos llegaran a una solución algorítmica el tutor les propuso continuar con el paso “busco una operación” de la tarjeta auto instruccional pero se encuentran con obstáculos para hacerlo porque piensan que deben encontrar una sola operación que los lleve al resultado final. Finalmente suman las fracciones indicadas en su dibujo y obtienen el mismo resultado que en su dibujo.

El trabajo en ambos problemas muestra cómo los alumnos pueden evolucionar en la representación de los problemas si sus actividades se realizan en un contexto como el de las comunidades de aprendizaje, que favorece la reflexión y la discusión y además si existe la oportunidad de emplear y analizar diferentes formas de representación en sucesivas soluciones. Igualmente se ejemplificó cómo mediante la enseñanza de una estrategia de solución de problemas se pueden resolver las dificultades de los alumnos para estructurar su actividad durante la solución (Schoenfeld, 1992; Flores, 1999).

Conclusiones

La promoción del aprendizaje colaborativo dentro de una comunidad de aprendizaje en la solución de problemas matemáticos pone de manifiesto las invariantes que poseen los alumnos del concepto de fracción y su interpretación en un momento dado y que sirven de información para comprender sus representaciones y con ello proporcionar las ayudas adecuadas al nivel cognitivo que se encuentran. La interacción entre pares permitió que los alumnos expresaran y argumentaran propuestas de solución para ser consideradas por los demás compañeros con el fin de compartir conceptos que les permitieran experimentar nuevas soluciones y con ello desarrollar nuevos conocimientos.

Las principales problemáticas encontradas en los alumnos se pueden agrupar en tres categorizaciones: el concepto de fracción, procedimientos rutinarios de operaciones con fracciones y creencias sobre problemas con fracciones. En primer lugar, se encontraron dos diferentes conceptos de fracción relacionados con la conservación del entero, por un lado, quien conserva el entero tiene el conocimiento de que un entero puede fraccionarse en partes, y cada parte puede fraccionarse también pero todas son parte del mismo entero, de tal manera que la suma de todas las partes dan como resultado al entero. Por otro lado, quien no conserva el entero, tiene el conocimiento de que un entero puede fraccionarse, pero cada fracción se "convierte" en nuevo entero independiente del original que puede fraccionarse también. A pesar de tratarse de alumnos de secundaria (con bajo aprovechamiento) algunos presentan aún el problema de la conservación del entero encontrado en alumnos de primaria (Nunes et al. 1998).

En segundo lugar se tienen las problemáticas sobre los procedimientos rutinarios. Los alumnos presentaron problemas para recordar los procedimientos sobre la obtención del común denominador, además confundían el procedimiento de la multiplicación con el de la división. Durante la suma fue notoria la dificultad que presentaron para comprender la relación entre numerador y denominador que eran sumados como si fueran enteros sin alguna relación entre sí. Los conocimientos de los procedimientos de operaciones con fracciones no son suficientes si no se interpreta de una forma adecuada el problema.

En tercer lugar se desprenden algunas creencias que los alumnos mostraron sobre los problemas con fracciones: a) los problemas hacen referencia a un entero cuyo valor es uno, no se pensó en un principio que el entero podría tener un valor diferente como por ejemplo cuatro. b) Al resultado final se tiene que llegar con una sola operación que involucre a todas los valores que se detecten en el texto del problema. c) Si el problema menciona aparentemente una sola cantidad, entonces su solución comienza con fraccionar tal cantidad como si fuera el entero.

En este sentido puede inferirse que los alumnos estaban habituados a una enseñanza basada en el aprendizaje de procedimientos fijos donde lo importante es proponer una operación sin necesidad de hacer uso de otras estrategias como el empleo de dibujos. Sin embargo, los problemas presentados exigieron de los alumnos un pensamiento matemático que no se limitó al mero uso de un algoritmo formal, sino al análisis de su pertinencia haciendo uso, además, de los apoyos necesarios (dibujos, líneas o gráficas), conocimientos previos y cotidianos de los que se dispone para buscar la solución y valorar el resultado.

Los alumnos tienen una representación del problema propia con el que se enfrentan al problema y con la que hacen propuestas de solución durante la interacción con otros compañeros quienes pueden tener una representación más desarrollada. El objetivo de la enseñanza por problemas matemáticos no es llegar a la solución correcta. Es necesario durante la enseñanza considerar que el paso de una representación a otra es un proceso que no culmina cuando se llega al resultado correcto del problema, de la misma manera un problema no agota las posibilidades de aprendizaje, sino que es necesario continuar proveyendo a los alumnos de problemas que les permita hacerse representaciones que les permita proponer procesos de solución acordes a lo que el problema plantea y, además que les permita desplegar una serie de recursos matemáticos de los que disponen los alumnos en interacción con sus compañeros.

Bibliografía

Dávila, M. (1992), "El reparto y las fracciones", *Educación matemática*, vol. 4, núm. 1, pp. 32-45.

Ernest, P. (1998), "The Culture of Mathematics Classroom and the Relations between Personal and Public Knowledge: An Epistemological Perspective", En Falk Seeger, Jörg Voigt & Ute Waschescio (Eds), *The Culture of the Mathematics Classroom,* Cambrige University Press.

Flores, R. (1999), “La enseñanza de una estrategia de solución de problemas a niños con problemas de aprendizaje”. *Integración, Educación y Desarrollo Psicológico*, vol. 11, núm. 11, pp. 1-17.

Flores, R. (2005), “El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas”. *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 2, pp. 7- 34.

Jones, E; Wilson, R y Bhojwani (1997), “Mathematics instruction for secondary students with learning disabilities”, *Journal of Learning Disabilities,* vol. 2, pp. 151-163.

Macías, H. (2003), “Comunidad de aprendizaje”, Documento en línea disponible en http://kino.tij.uia.mx/~humberto/comun3.html

Mancera, E. (1992), “Significados y significantes relativos a las fracciones”, *Educación Matemática,* vol. 4, núm. 2, pp. 30-54.

Nunes, T; y Bryant, P; (1998), *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI. Segunda edición.

Parra, M. (2004), La instrucción por medio de problemas dentro de una comunidad de aprendizaje matemático. Tesis de maestría. UNAM.

Piñón, M. (1995), “Las fracciones en la escuela”, *Pedagogía,* vol. 10, núm. 5, pp. 58-65.

Rivera, P. (1996), “Using cooperative Learning to Teach Mathematics to Students with Learning Disabilities”, Documento en línea, disponible en http://www.ldonline.org/ld_indepth/math_skills/coopmath.html

Santos, L. (1997), *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de CV., 2ª Edición.

Schoenfeld, A. (1992), “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics”. En: Douglas Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the NCTM*. USA: Macmillian Publishing Company, pp.334-370.

SEP (1993), *Plan y programas de Estudio, Educación Básica Secundaria*. México: SEP.

Torres, Rosa, M. (1999), “Comunidad de aprendizaje: Una comunidad organizada para aprender.” Documento en línea disponible en http://www.psi.uba.ar/carrerasdegrado/psicologia/educaci1/bibliografia/COMUNIDAD%20DE%20APRENDIZAJE.rtf

Valdemoros, M. (1997), “Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso”, *Educación matemática*, vol. 9, núm. 3, pp. 5-17.

Waldegg, G. Villaseñor, R, y García, V. (1998), *Matemáticas en contexto. Aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Primer curso. México: Grupo editorial Iberoamérica.