El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas

Rosa del Carmen Flores Macías

Resumen: Un marco de referencia para comprender el papel que desempeñan los procesos cognitivos de los alumnos para aprender el significado de los algoritmos en la solución de problemas puede ser útil para crear situaciones de enseñanza que los ayuden a comprender el vínculo algoritmo-problema. En este trabajo, se analizan las actuaciones de dos alumnas de tercer grado al solucionar problemas en los que se puede aplicar el algoritmo de la sustracción. Los resultados se discuten considerando un modelo para analizar la evolución en la representación del problema, en el que se considera el tránsito desde una representación no canónica del problema hacia una representación canónica algorítmica. En este modelo se pone especial énfasis en el papel que desempeñan los conceptos.

Palabras clave: problema, algoritmo, concepto, esquema, representación.

Abstract: Having a frame of reference to understand the role played by student's cognitive processes while learning the meaning of algorithms in problem-solving can be useful to create teaching situations that help them understand the "algorithm-problem" relationship. In this paper, we analyze the performance of two students working with problems in which the subtraction algorithm can be applied. Results are discussed considering a model that analyzes how problem representation evolves, considering the transit from a non-canonical to an algorithmic canonical representation. This model emphasizes the role played by concepts.

Keywords: problems, algorithm, concept, scheme, representation.

Fecha de recepción: 4 de enero de 2005.

INTRODUCCIÓN

Los algoritmos son una de las herramientas culturalmente desarrolladas que más ha contribuido a que la gente común y corriente resuelva con mayor eficiencia problemas matemáticos que enfrenta o se plantea en su vida diaria; y precisamente esta necesidad fue la que dio lugar a su invención y desarrollo. La versión moderna de los algoritmos para la adición, sustracción, multiplicación y división tuvo sus orígenes en el trabajo del sabio árabe Mohamed ibn Musa Al'khwarizmi (780 a 850 d.C.), que integró tres conocimientos centrales: la numeración hindú, el valor posicional y el cero.

No obstante lo transcendente que hoy día nos parece su invención, pasaron muchos siglos para que el algoritmo se volviera un conocimiento universal. Dantzing (1971) narra la historia de un comerciante del siglo XV que, queriendo dar a su hijo la mejor educación, enfrenta la disyuntiva de enviarlo a una universidad en Alemania para adquirir sólo conocimientos sobre adición o sustracción o a Italia para, además, adquirir conocimientos sobre la multiplicación y la división, pues en aquella época se requerían estudios muy especializados, razonamientos complejos y cálculos complejos para solucionar problemas cotidianos empleando algoritmos. Dantzing refiere que, para que en la Europa del siglo XV se aceptaran los algoritmos, hubo que vencer prejuicios y cambiar ideologías que favorecieron su desarrollo hasta alcanzar su versión actual. El hecho que más contribuyó a su adopción fue que era una herramienta más eficiente que otras formas de cálculo para resolver problemas en actividades como: realizar transacciones de compra y venta, preparar alimentos, distribuir un presupuesto, programar viajes, etc.; actividades que tanto en el pasado como hoy día realiza una persona común.

Al conocer la historia de esta herramienta que se desarrolla gracias a su utilidad en muy diversas situaciones, es una paradoja que en nuestras escuelas los alumnos aprendan la herramienta, pero no dónde emplearla. Más bien que mal, la gran mayoría de los alumnos aprenden a sumar, restar, multiplicar y dividir, pero muestran un conocimiento limitado de su aplicación a problemas de la vida diaria. Esta situación, desde luego, está muy relacionada con la manera como se enseñan los algoritmos en las escuelas.

Tratando de que los algoritmos sean una herramienta útil, su enseñanza ha estado sujeta a varias reflexiones y consideraciones. Se ha visto que el ejercicio aislado y repetitivo no favorece que el alumno aprenda a utilizarlos, por lo que se ha propuesto su aprendizaje en el contexto de la solución de problemas. En

México, la Secretaría de Educación Pública 2002) plantea el desarrollo de la competencia general siguiente: "selecciona la operación matemática que necesita para resolver un problema, la realiza convencionalmente y con la ayuda de la calculadora", y para tercer año, la competencia específica: "Al solucionar problemas comprende las reglas de suma y resta" y propone los siguientes indicadores: "resuelve problemas sencillos de suma y resta utilizando diversos procedimientos, uso de materiales, dibujos u operaciones"; "identifica cuando se resuelve un problema con una suma o una resta"; "reconoce que con el procedimiento de la suma o la resta se resuelve un problema más rápido"; "reconoce la relación entre suma y resta".

No obstante estos planteamientos, el problema de aprender dónde emplear la herramienta no se ha resuelto. Ávila, Block y Carvajal (2003) analizan el trabajo de diversos investigadores mexicanos que registran que, si bien la enseñanza de los algoritmos en el contexto de la solución de problemas se empieza a adoptar en las aulas, existen limitaciones: se pone mayor énfasis en el aprendizaje del procedimiento que en el significado del algoritmo; se concede un lugar privilegiado al algoritmo y hay dificultades para validar los procedimientos no algorítmicos; persisten prácticas como enseñar la definición del concepto (*v.g.* suma o resta), pasar a los ejercicios y luego a la aplicación para solucionar problemas; los profesores dan poca oportunidad a las soluciones espontáneas de los alumnos; los problemas tienen un formato tradicional y hay pocas posibilidades de un razonamiento complejo, y los profesores dirigen la actuación de los alumnos, pues son pocos los que reconocen en el error una oportunidad de aprendizaje. Por varias razones, estas prácticas conllevan dificultades, entre ellas:

1. Cuando no hay quien los dirija, los alumnos no logran reconocer cuál algoritmo emplear, en especial si los problemas plantean situaciones conceptualmente diferentes de aquéllas con las que han practicado.
2. Cuando se trabaja con problemas de un formato simple y con una baja complejidad conceptual, el nivel de conocimiento desarrollado es igualmente simple y la posibilidad de aplicación a una situación más compleja, común de la vida diaria, se limita.
3. Si el alumno no tiene oportunidad de probar sus procedimientos no algorítmicos, tampoco tendrá el espacio para descifrar la relación entre: los aspectos conceptuales del problema, los de su solución no algorítmica y los de la solución algorítmica. Este vínculo es esencial para entender el significado de la suma, la resta, la multiplicación y la división en el contexto de un problema.

4. Se promueven prejuicios que coartan la oportunidad de establecer un puente entre soluciones no algorítmicas, a la que los alumnos recurren espontáneamente, y una solución algorítmica, pues tanto maestros como alumnos consideran que aplicar las primeras es "hacer trampa". Si las llegan a usar, los alumnos lo hacen subrepticiamente, por lo que no hay oportunidad de discutir sus relaciones y diferencias.
5. La consecuencia final de esta manera de enseñar y aprender los algoritmos es que los alumnos terminan la educación básica entendiendo superficialmente su utilidad en la vida diaria.

Ante estas limitaciones, uno se pregunta: ¿Por qué persisten estas formas de enseñar los algoritmos? Parecería que quienes suelen encargarse de su enseñanza (padres, maestros) consideran que para que los alumnos entiendan el vínculo problema-algoritmo, basta con que conozcan el algoritmo apropiado y se prescriba su utilización en el problema. Esta creencia tiene como consecuencia que no se estimule el empleo de procedimientos no algorítmicos. Asimismo, parecería que se considera que si el alumno comprende el planteamiento del problema, comprende igualmente las implicaciones de su solución mediante un algoritmo. Las investigaciones de Carraher, Carraher y Schliemann (1991) documentan las consecuencias negativas de ambos supuestos; sin embargo, se requieren más pruebas que justifiquen por qué es necesario que los alumnos pasen por un proceso en el que se les estimule para buscar soluciones no algorítmicas. Además, se requiere proveer explicaciones sobre por qué el alumno, al comprender el planteamiento de un problema, no necesariamente comprende su solución algorítmica.

En este trabajo se pretende analizar el papel que desempeñan los conceptos en el entendimiento del vínculo problema-algoritmo. Se propone un modelo para analizar el proceso por el cual los alumnos perfeccionan la solución a los problemas hasta llegar a comprender la aplicación del algoritmo. El eje central del modelo es la adquisición de conceptos que llevan al alumno desde la asignación de un significado erróneo del problema hasta su comprensión canónica y el empleo de un algoritmo para su solución. Para tal fin se analizará el caso del algoritmo de la sustracción aplicado a la solución de problemas relativos a las situaciones aditivas.

El trabajo de Gerard Vergnaud brinda un marco de referencia psicológico para analizar y discutir esta cuestión. Vergnaud (1990) plantea que su teoría atiende a cómo el conocimiento matemático adquiere su significado a lo largo del desarrollo y en los diferentes contextos donde actúa el individuo. En su teoría se considera que el proceso de conceptuación es el eje de la organización de la acción en distintas situaciones y el mecanismo básico de la transformación y apropiación del conocimiento. Para analizar este proceso, Vergnaud se refiere a tres componentes centrales en su propuesta teórica: campo conceptual, esquema y representación.

CAMPO CONCEPTUAL

Vergnaud (1990, p. 23) define un campo conceptual como "un conjunto de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere algunas clases de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unos con otras". Asimismo, indica que la relación entre conceptos y situaciones es esencial, puesto que el campo conceptual " es un conjunto de *situaciones*, cuyo dominio requiere algunos conceptos interconectados. Al mismo tiempo, es un conjunto de conceptos con diferentes propiedades, cuyo significado se deriva de una variedad de situaciones" (Vergnaud, 1996, p. 225). La teoría de los campos conceptuales sitúa a los conceptos en el eje de la explicación de los procesos mediante los cuales un alumno da significado a un problema.

Para Vergnaud (1997a) los conceptos son los ejes rectores de la acción. La construcción del significado de los conceptos ocurre a lo largo del desarrollo, en interacción con situaciones cotidianas en las que el individuo aplica diferentes sistemas de representación lingüística y simbólica. En los siguientes párrafos se presenta un análisis de los tres conjuntos mediante los cuales el autor propone que deben estudiarse el desarrollo y operación de los conceptos:

1. *Las invariantes* son los significados que el individuo gradualmente domina en el transcurso de su desarrollo. Se refieren a las propiedades de los objetos, a sus relaciones y a las operaciones para su transformación. Al inicio del desarrollo, este conocimiento es implícito y constituye la base del conocimiento formal. Vergnaud (1990, p. 20) se refiere a él como *conceptos en acto* y *teoremas en acto* "que no pueden ser llamados 'conceptuales' ya que el conocimiento conceptual es necesariamente explícito". Las relaciones entre ambos son evidentemente dialécticas, los unos no pueden ser sin los otros (Vergnaud y Récopé, 2000).
2. *Las representaciones simbólicas, lingüísticas o gráficas* son mediadoras entre la actividad externa y la actividad interna del individuo en las situaciones matemáticas. A la vez que se utilizan como herramientas del pen-

samiento durante la acción, derivan su significado de la acción en diversas actividades. Por ello, en el desarrollo del conocimiento relativo a los sistemas simbólicos se resalta tanto el papel mediador de la cultura como el del proceso epistémico (Carraher, Carraher y Schliemann, 1991).

3. *Las situaciones* son los eventos que dan significado a la relación entre *invariantes y simbolizaciones* e involucran objetos, propiedades de los objetos y relaciones entre ellos. Las *situaciones* constituyen el marco de referencia para identificar y clasificar los problemas desde el punto de vista matemático.

Además de sus ideas acerca del campo conceptual y del concepto, Vergnaud plantea la noción de esquema para explicar cómo se articula la actividad en el proceso de dar significado a un problema.

ESQUEMA

Recuperando el trabajo de Piaget, Vergnaud (2000; Vergnaud y Récopé, 2000) considera que el esquema es una forma invariante de organización de la actividad, cuya función primaria es generarla a medida que se actúa en una situación. Los avances en la situación son resultado de la acción del alumno, del efecto de la dinámica propia de la situación independiente del alumno o del efecto de ambos. Vergnaud plantea las siguientes propiedades del esquema:

a) Se relacionan con todas las formas de la actividad: acciones, juicios y razonamientos intelectuales. Estas manifestaciones son distintas pero rara vez independientes, lo que da lugar a un enriquecimiento de los esquemas en el curso de la experiencia, por su descubrimiento, combinación, diferenciación y reestructuración.

b) Poseen una función asimilatoria que es esencial. Ante situaciones u objetos nuevos, los esquemas formados para situaciones conocidas son evocados y probados. Los esquemas evocados permiten interactuar con la situación nueva y esclarecer su relevancia para aprender algo sobre ésta. Puede suceder que ocurra una asimilación de la nueva situación, pero también que el esquema evocado no se ajuste y sea necesario un proceso de acomodación para separar y recombinar los componentes del esquema existente o construir nuevos esquemas. En virtud de ambas propiedades, el esquema se propone como la estructura básica para entender las continuidades y

> discontinuidades que ocurren en el proceso de construcción y adaptación del conocimiento (Brun, 1996). Al comprender un problema, el alumno organiza su actividad conforme a determinado esquema, pero en el curso de la actividad, éste puede ser sustituido, reconformado o creado en función de su relación con los esquemas que dieron lugar al entendimiento original del problema.

Vergnaud (2000; Vergnaud y Récopé, 2000) indica que, para entender el funcionamiento de los esquemas al dar significado a un problema, es necesario considerar sus componentes estructurales. Por separado, los componentes no son funcionales, pero en conjunto, vuelven al esquema una *totalidad dinámica y funcional*. Éstos son: propósitos, reglas de acción; invariantes operacionales e inferencias. *Grosso modo*, en el contexto de la comprensión y solución de un problema, la definición de cada componente sería:

Los propósitos se refieren, según sea la situación de que se trate, a la intención, la motivación, el deseo, la necesidad. Al solucionar un problema, los individuos anticipan la meta del problema según un entendimiento; establecen y modifican sus planes conforme a la concordancia de las acciones con los resultados esperados; replantean su interpretación y resultados esperados.

Las invariantes (a las que ya se había hecho referencia) son la parte directamente epistémica del esquema; tienen la función de: reconocer los objetos matemáticos, sus propiedades, sus relaciones y las transformaciones que estos objetos experimentan; extraer y seleccionar la información pertinente; inferir las consecuencias útiles para la acción y controlar la toma de información posterior. Es, por tanto, una función de conceptuación y de inferencia (Vergnaud y Récopé, 2000).

Las inferencias llevan al individuo a decidir qué información considerar y a adaptar su actividad en un problema, pero lo más importante, es que lo llevan al entendimiento de las relaciones entre conceptos y teoremas relacionados con el entendimiento del problema y su solución.

Las reglas de acción son la parte propiamente generativa del esquema, guían la toma de información y la regulación de la actividad. Las reglas de acción son la puesta en práctica de los teoremas en acto. No engendran tan sólo la acción, sino toda la actividad mental que no es directamente observable, como es el caso de las inferencias.

Si se tienen en cuenta estos cuatro componentes del esquema, se puede comprender cómo la actuación de un alumno ante un problema puede ser sistemática y contingente (Vergnaud y Récopé, 2000). Sistemática, porque en cada situación las acciones del alumno no son fortuitas, obedecen a un entendimiento del problema y a un propósito en su solución (sean éstos correctos o no). Contingente, porque estas acciones se deciden anticipando lo que se considera que es apropiado y se debe hacer en la situación. Si se da el caso de que el alumno no conozca el esquema apropiado, ensayará alternativas y lo construirá a partir de los existentes.

Si se consideran sus componentes estructurales, se verá que los algoritmos son esquemas, pues según Brun (1996), comprenden conceptos y teoremas en acto, propósitos, reglas de acción e inferencias. En el caso particular del algoritmo de la resta, sus componentes implican entendimientos acerca del sistema decimal, las relaciones entre los números que llevan a la acción de decrementar, así como la coordinación con otros significados que lo relacionan con diversas situaciones (transformaciones, comparaciones, combinaciones, etc.). De esta manera, el esquema, como organización invariante de la actividad, se utiliza de manera flexible y adaptándose a diversos problemas.

La explicación de Vergnaud del esquema nos acerca al entendimiento de la relación entre el problema y el individuo que le da significado y actúa en consecuencia. No obstante, queda por explicar cómo es que se coordinan y articulan los esquemas, que son parte del proceso de dar significado y solucionar un problema. El concepto de *representación* como conjunto de esquemas sirve para este fin.

REPRESENTACIÓN

Vergnaud (2000; Vergnaud y Récopé, 2000) propone una concepción de la *representación* que permite, en particular, analizar la organización y operación de los esquemas que se elaboran durante la experiencia. La relevancia de la representación para la acción en el problema es evidente en el trabajo de Vergnaud (1987) desde la manera como la concibe. Él la explica en términos de la relación de tres elementos: referente, significado y significador:

El *referente* es el mundo real tal y como se le presenta al alumno a lo largo de su experiencia. El mundo es cambiante y el alumno actúa sobre él para producir eventos y efectos que le complacen o que están de acuerdo con sus expectativas y representaciones, conscientes o inconscientes.

El *significante* está en el corazón de la teoría de la representación, en el sentido de que es en este nivel donde se reconocen las invariantes, las inferencias perfiladas, las acciones generadas y las predicciones hechas.

El *significador* consiste en diferentes sistemas simbólicos que están diferencialmente organizados... Es esencial reconocer que los símbolos empleados en la comunicación están en el ámbito de los significadores, mientras que los significados están en el ámbito de los significantes (p. 229).

Vergnaud (Vergnaud y Récopé, 2000) propone aceptar tres entendimientos de la representación que son parte de la literatura psicológica y que se corresponden con los elementos antes descritos y un cuarto entendimiento que integra los anteriores:

1. Como flujo de conciencia. Mediante la percepción y la imaginación que contribuyen a la identificación de los objetos, sus propiedades y sus relaciones.
2. Como un sistema de invariantes. Los significados relativos a conceptos en acto y teoremas en acto que permiten pensar y actuar en la realidad.
3. Como un sistema de signos y símbolos. Que median la comunicación y el pensamiento. En este sistema es esencial el vínculo entre los invariantes y el leguaje natural.
4. Como un ensamble de esquemas que, al ser integrados, organizan la actividad y permiten:
   a) Simular la realidad y anticiparla. El alumno, mediante su conocimiento de conceptos y principios matemáticos y su conocimiento acerca de representaciones gráficas, lingüísticas y simbólicas, simula los eventos y relaciones expresadas en un problema y anticipa su comportamiento en la solución.
   b) Organizar y dirigir la actividad. A partir de la representación, en la solución de un problema los alumnos establecen propósitos, deciden cambios, hacen ajustes, dilucidan inferencias, etcétera.

Los esquemas por separado no logran dar cuenta de los aspectos anteriores. Pero la articulación de esquemas en una representación logra que ésta simule, organice y dirija la actividad.

En el transcurso de la actividad, los esquemas se transforman o son sustituidos y dan lugar a nuevas relaciones entre esquemas. En este sentido, se plantea que la representación es al mismo tiempo producto de la acción, pues gracias a la experiencia sobre las situaciones, los alumnos aprenden formas más complejas y eficaces de representación (Vergnaud y Récopé, 2000).

Las nociones integradas de campo conceptual-esquema y representación-constituyen un campo de referencia para explicar cómo se logra dar un significado a un problema y cómo se actúa para solucionarlo. La noción de campo conceptual explica la relación entre entramados de conceptos que se activan al entender los argumentos de un problema y al entender su solución. La noción de esquema atiende a la organización de la actividad del alumno, a cómo planifica, organiza, decide sus acciones e integra y adapta sus conocimientos en la solución de un problema. Finalmente, la noción de representación explica cómo el alumno simula, anticipa y actúa sobre el problema, poniendo en juego un entramado de esquemas que median entre el entendimiento y la solución de éste.

En un trabajo anterior (Flores, 2003) se adoptó la propuesta de Vergnaud para comprender y analizar de manera integrada los esquemas que constituyen la representación de distintos problemas de suma y resta. Se propuso que, en la representación de un problema, están contenidos los esquemas que forman parte de su entendimiento y de su solución. Asimismo, se planteó la necesidad de identificar los conceptos y las relaciones entre conceptos que son clave en el vínculo problema-algoritmo en diversas situaciones.

A partir de lo observado en la citada investigación, se podría describir, *grosso modo,* la construcción de una representación de la siguiente manera: al comprender un problema, el alumno lo representa –lo cual implica aprovechar conocimientos ya existentes o construir otros nuevos–, en su representación están contenidos esquemas de entendimiento y de solución. El entendimiento puede resultar de la evocación y adaptación de un esquema conocido o del descubrimiento de uno nuevo. Con base en el entendimiento, se plantea una solución y se anticipa cierto resultado. Para solucionar el problema, el alumno decide cuál información es relevante y contingentemente decide cuáles serán las acciones apropiadas, ensaya uno o más esquemas de solución y acepta los que son congruentes con su entendimiento.

Dado el carácter flexible y adaptable del esquema, en el transcurso de la actividad el alumno puede rectificar, adecuar o modificar sus conocimientos, siempre buscando una congruencia entre su entendimiento y la solución del problema. Adopta nuevas representaciones que se vinculan con formas de representación que ya le son válidas. Estas relaciones entre representaciones son un indicador claro de la evolución del conocimiento.

En dicho estudio se identificaron diferentes categorías de la representación en las que se integran diversos esquemas de entendimiento y solución. A partir de éstas, se derivó un patrón en la evolución de la representación. A continuación, se presentan las categorías de representación encontradas:

Representación no canónica

En el esquema de entendimiento, el alumno aplica su conocimiento de una clase de problema que no corresponde al que se le plantea: es una interpretación equivocada del problema. Las reglas de acción, inferencias y propósitos para entender el problema corresponden a este significado *no canónico*. Los invariantes corresponden a los del significado no canónico atribuido al problema.

La solución generalmente se basa en un esquema algorítmico, pues el alumno posee el conocimiento para vincularlo con su interpretación (equivocada) del problema. Pero también puede ser no algorítmico cuando el alumno no conoce el vínculo entre un algoritmo y la clase de problema que consideró.

En general, la elección de un esquema erróneo es sistemática y corresponde a un problema perteneciente a la misma situación, pero más simple en términos del tipo de conceptos y relaciones entre conceptos que implica.

Representación canónica no algorítmica

Esta representación refleja un conocimiento rudimentario de las relaciones expresadas en el problema; en el esquema de entendimiento, las reglas de acción, inferencias y propósitos corresponden a un significado *canónico*. En el esquema de solución no se recurre a una operación aritmética, por lo que se considera *no algorítmico*; generalmente éste imita, mediante objetos o marcas gráficas, los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en el problema.

Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico

Esta representación constituye un puente el entendimiento de la relación algoritmo-problema. El esquema de entendimiento, las reglas de acción, inferencias y propósitos corresponden a un significado *canónico*. En la solución coexisten dos esquemas, uno no algorítmico, que es el que sustenta la solución, y uno algorítmico, que se acepta siempre que lleve a un resultado congruente con el obtenido mediante el esquema no algorítmico. A veces, el esquema no algorítmico precede al algorítmico y a veces se actúa al contrario.

Al principio, el algoritmo se acepta porque arroja el mismo resultado que el esquema no algorítmico, pero el alumno no se explica cómo es que son equivalentes entre sí. Para llegar a esta explicación, necesita construir nuevas relaciones entre los conceptos conocidos y descartar conceptos que son apropiados para un esquema no algorítmico pero no para uno algorítmico. La identificación del algoritmo se puede dificultar cuando el conocimiento del alumno acerca de éste contradice su entendimiento del problema (por ejemplo, si el problema habla de una transformación positiva, no se entiende la aplicación de la sustracción para calcularla).

Al principio, la relación entre ambos esquemas se basa en indicadores superficiales. Por ejemplo, los alumnos explican que contar con los dedos desde un número menor hasta uno mayor es lo mismo que restar del número mayor el menor, porque en ambos se obtiene el mismo resultado o porque en ambos esquemas se cuenta de manera similar (en ambos se dice *tantos para llegar a tantos*). Estas explicaciones serán sustituidas por otras basadas en el análisis de las relaciones entre invariantes operacionales.

Representación canónica algorítmica

En el esquema de entendimiento, se entienden las relaciones planteadas en el problema conforme a su significado canónico y, en el de solución, se comprende la relación con un algoritmo en particular. En este caso, se observa que el algoritmo funciona eficientemente como una herramienta de pensamiento pues: el alumno comprende las relaciones expresadas en él; es firme en la elección de un algoritmo determinado; y tiene argumentos para decidir por qué no es válido algún otro algoritmo.

Es necesario que el alumno construya nuevos conocimientos y descarte otros para presentar una *representación canónica algorítmica*. Así, se observó la existencia de conocimientos –conceptos en acto y teoremas en acto– que son clave en la evolución de la representación y que se vinculan con conocimientos y acciones fundamentales de la adición (combinar, juntar, aumentar) y la sustracción (decrementar).

Considerando el anterior patrón evolutivo de la representación, en el presente trabajo se pretende considerar los conceptos y relaciones entre conceptos para establecer un posible vínculo entre tres esquemas: el entendimiento del problema, la solución no algorítmica y la solución algorítmica. Se analiza el caso particular de las situaciones aditivas, cuya solución se relaciona con el empleo del algoritmo de la resta. La decisión de elegir la sustracción obedece a que resulta difícil para los alumnos reconocer su utilidad en la solución de problemas, pues suelen representarla como la operación contraria a la adición, cuando en realidad posee una significación propia (Vergnaud, 1997a). Esto se pondrá en evidencia en el análisis de los resultados del presente informe.

Participantes

Dos alumnas, Juana y Yola, tenían 10 años de edad y cursaban tercero de primaria. Ambas fueron consideradas por su maestra como alumnas regulares.

Procedimiento

Se empleó la metodología de entrevista clínica (Ginsburg, 1996). Al iniciar la entrevista se presentó a las niñas el problema por escrito para que lo leyeran. En caso de que tuviera alguna dificultad en la lectura, la entrevistadora les ofrecía leérselo. Las entrevistas se desarrollaron de manera individual.

Descripción de los problemas por resolver

Los problemas estudiados (véase el anexo) corresponden a situaciones de combinación, transformación, comparación y combinación de transformaciones (Vergnaud, 1998). Se seleccionaron problemas que se presumió podrían representar un reto para las alumnas y que, por tanto, darían oportunidad de explorar diferentes manifestaciones de su conocimiento.

Resultados

Juana

Es una niña que se muestra segura de sí misma. En todos los problemas con los que trabajó mostró un entendimiento canónico y preferentemente recurrió a un esquema algorítmico. Con frecuencia, emplea en sus argumentos términos matemáticos y muestra claridad en las relaciones asociadas a la sustracción. En algunas ocasiones no puede justificar el uso del algoritmo; sin embargo, se muestra firme en el significado de sus soluciones. En estos casos, ella señala "que no sabe por qué, pero así debe de ser". Juana considera que si ya se es grande no se debe contar con los dedos; además de que no es muy hábil para hacerlo, no puede coordinar el conteo de unidades y al mismo tiempo llevar la cuenta de las decenas que ha acumulado. Cuando difieren sus resultados entre ambos esquemas, ella privilegia el algoritmo.

Yola

Es una niña que enfrenta con muy buen humor las situaciones que no entiende, no se siente incómoda cuando hay algo que no sabe, simplemente se ríe. Cuando está segura de su solución, argumenta describiendo el proceso que siguió, pero no emplea argumentos en los que se hace alusión a los conceptos o a sus relaciones. Cuando la entrevistadora le presenta un argumento contrario a su punto de vista, parece aceptar lo que dice la entrevistadora, pero en su explicación retoma su propio punto de vista.

Yola conoce el algoritmo de la sustracción y la mayoría de las veces lo realiza sin errores. Sin embargo, recurre en varios de los problemas al esquema no algorítmico de agregar elementos de uno en uno desde el número menor hasta el mayor. Para realizarlo, escribe una marca por cada elemento que agrega y luego cuenta los elementos agregados. Este esquema frecuentemente es la base para seleccionar el algoritmo de la resta.

Solución a las situaciones de combinación

Para entender estos problemas se requiere establecer una relación entre las medidas de conjuntos elementales y uno compuesto. En el problema "Canicas" (Joaquín tiene 85 canicas, 37 son payasitos y las demás son munditos. ¿Cuántas canicas son munditos?), se pide identificar uno de los conjuntos elementales, conociendo el compuesto y el otro elemental. Para solucionar el problema empleando el algoritmo de la resta, un conocimiento clave es la relación inversa entre adición y sustracción. Ambas niñas muestran este conocimiento y presentan una representación canónica algorítmica y argumentan que no puede emplear-se la adición, pues el conjunto elemental no puede ser mayor que el conjunto compuesto.

Solución a las situaciones de transformación

Para entender estos problemas, es necesario relacionar en el tiempo, el estado inicial de un evento, una transformación y el estado final del evento. En ciertos problemas, la solución algorítmica requiere entender la inversión de la transformación y la relación inversa entre adición y sustracción.

En el problema "Volados" (Luis tenía 134 estampas, en el recreo jugó volados y ganó unas. Al terminar el recreo tenía 151 estampas. ¿Cuántas estampas ganó Luis en los volados?), Juana presenta una representación canónica algorítmica, entiende que la incógnita está en la transformación y, para su solución, establece una relación entre el estado final y el estado inicial. Inicia con un esquema no algorítmico, agregando elementos desde el estado inicial hasta el estado final, tiene un error que no identifica en el conteo al agregar elementos, luego emplea el algoritmo de la resta. Como los resultados difieren, acepta el obtenido mediante el algoritmo. En sus acciones, se identifica que conoce la relación inversa entre adición y sustracción, pues asocia agregar elementos del estado inicial al final con la sustracción del estado final menos el inicial, y considera la inversión de la transformación, pues indica que al inicio debía tener menos canicas que al final; al explicar su resta señala; "al iniciar tenía 134 y luego tuvo 151 y ganó 17".

En contraste, Yola presenta una *representación canónica algorítmica basada en un esquema no algorítmico*. Primero calcula la transformación, agregando de uno en uno elementos desde el estado inicial hasta el estado final. Cuando se le pide encontrar la transformación con una operación, ensaya sumar ($134 + 151 = 285$) y la descarta, pues el resultado es mayor que el valor del estado final, propone *hacerlo al revés*; entonces resta ($151 - 134 = 17$) y acepta el resultado porque es congruente con su esquema no algorítmico. Muestra un entendimiento incipiente de la aplicación de la relación inversa entre adición y sustracción, sustentada sólo en la similitud entre las cantidades. Esto se ilustra en su explicación de por qué agregar elementos de uno en uno del menor al mayor es lo mismo que restar.: "aquí [se refiere a las marcas en el cuaderno] el 17 son los que ganó Luis y acá [se refiere al resultado de su resta] también son los que ganó Luis, estos 151 son los que tenía al terminar el recreo y estos 134 son los que tenía Luis". Para emplear de manera directa el algoritmo de la resta, sin necesidad de apoyarse en su esquema no algorítmico, Yola necesita tener conocimientos acerca de la inversión de la transformación que le permitan inferir la relación entre un estado inicial y uno final en el que se desconoce la transformación. Asimismo, necesita descartar su entendimiento de que, si la situación habla de una transformación positiva, es necesario sumar.

En el problema "Apuesta" (Carlos tenía 145 carritos, en el recreo apostó unos. Al terminar el recreo tenía 79 carritos. ¿Qué pasó en la apuesta?), ambas niñas presentan una *representación canónica algorítmica*, identifican que la incógnita está en la transformación e infieren que, si ésta representó un decremento, lo apropiado es restar. Ellas conocen el significado de la resta como transformación negativa. Yola tiene un error en el procedimiento de reagrupamiento de las decenas, pues en lugar de disminuir una, la aumenta ($145 - 79 = 86$).

En el problema "Cumpleaños" (Antes de su cumpleaños Ana tenía algo de dinero en su alcancía. Después, su abuelita le regaló 88 pesos y así juntó 152 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana antes de su cumpleaños?), Juana recurre a una *representación canónica algorítmica*. Entiende que se pregunta el estado inicial, en su solución primero ensaya la suma y la descarta argumentando que la cantidad inicial no puede ser mayor que la final. Resta y obtiene un resultado congruente con su entendimiento. Aparentemente, al inicio Juana infiere que, si el problema habla de una transformación positiva, habría que sumar, pero espontáneamente descarta esta inferencia, presumiblemente, al analizar la relación entre la transformación y el estado inicial para calcular el estado inicial. Si bien es cierto que, en el primer ensayo, la solución es no canónica, ella replantea su solución para dar una solución canónica, esto es posible gracias a su conocimiento de la relación inversa entre adición y sustracción y a su conocimiento de la relación entre la resta y la inversión de la transformación. Conocimiento que se desprende de su explicación "es resta porque si a 152 le quitas 88 te da lo que tenía antes Ana".

En el esquema de entendimiento, Yola infiere que el estado inicial es menor que el estado final, pero no logra inferir el papel de la relación de la transformación con el estado final para emplear la resta. En el esquema de solución, primero ensaya sumar, posiblemente porque el problema habla de una transformación positiva (la cantidad que el personaje recibe de regalo), pero descarta el resultado de la suma y explica que el estado inicial debe ser menor que el estado final. Sin embargo, acepta como estado inicial el resultado de la suma que descartó ($88 + 152 = 240$) con lo que considera un dato que no aparece en el texto del problema. Ella indica que está confundida y vuelve a leer, prueba de nuevo sumar el estado final más la transformación y vuelve a descartar el resultado, dice que va a restar "al revés", y resta la transformación menos el estado final ($88 - 152 = 136$). Aunque escribe el número mayor en el minuendo, ella acepta su resultado, pues es congruente con su interpretación de que el estado inicial debe ser menor. La solución de Yola correspondería a un esquema de entendimiento canónico. Hay que resaltar que ella demuestra un entendimiento incipiente de la inversión de la transformación, infiere que debe haber una cantidad menor en el estado inicial. Sin embargo, en su esquema de solución, parecería que emplea el algoritmo de la resta, porque la suma no cubre su propósito. Cuando se le pregunta por qué restó, ella dice: "porque así me daba, creo que me daba menos". Yola decidió suspender en este punto su trabajo y no hubo oportunidad de observar si ella recurriría a un esquema no algorítmico que la llevaría a una representación canónica algorítmica basada en un esquema no algorítmico.

Solución a las situaciones de comparación

Para entender las situaciones de comparación, hay que establecer una relación entre la medida de un conjunto comparado y uno referente mediante la diferencia. Para ciertos problemas que se pueden resolver con la sustracción, se requiere conocer: que la diferencia es una medida que relaciona dos conjuntos pero que no pertenece a alguno de ellos, la relación de la diferencia con la sustracción y el recíproco de la relación de orden planteada entre los conjuntos referente y comparado.

En el problema "Pesos" (Luis tiene 124 pesos y Ana tiene 153 pesos. ¿Cuánto dinero más que Luis tiene Ana?), Juana presenta una *representación canónica algorítmica,* resta para calcular la diferencia. Considera la diferencia como una medida que relaciona a los conjuntos que se están comparando, pero que no pertenece a alguno de ellos. Ella explica que la diferencia es una cantidad "que no es de nadie".

En cambio, Yola soluciona el problema "Pesos" con una *representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico*. Primero transforma el conjunto menor agregando elementos de uno en uno hasta igualarlo con el mayor, así obtiene la diferencia, congruente con la acción de agregar, ensaya sumar y descarta, luego ensaya el algoritmo de la resta y lo acepta porque le da un resultado igual al de su esquema no algorítmico. En su justificación de la resta no es claro un vínculo con la diferencia, ella explica "porque si Ana tiene más Luis tiene menos y por eso lo resté". Su conocimiento de la diferencia está sustentado en un esquema no algorítmico de transformación e igualación y no ha establecido que la diferencia es un término relacional que vincula dos conjuntos pero que no pertenece a ninguno de ellos, ella indica que el resultado de la resta "son los de Ana, por los que lleva Ana a Luis".

En el problema "Muñequitos" (Ana tiene 76 muñequitos y Luis tiene 37 muñequitos. ¿Cuántos muñequitos menos que Ana tiene Luis?), Juana presenta una *representación canónica algorítmica*. Resta y explica que su resta es correcta porque "a 37 sumarle 39 da 76", implícitamente emplea la diferencia para relacionar ambos conjuntos.

Yola en el problema "Muñequitos" presenta una *representación canónica no algorítmica*. Considera que la diferencia es parte de uno de los conjuntos y trata de obtener un número que sea semejante al de alguno de los conjuntos que se presentan en el problema. Primero trata de hacer una resta ($76 - 37 = 30$) que descarta pues "este 30 no sé de quién es, entonces no vale", luego suma ($37 + 76 = 113$) y descarta, pues "le dio más" (que las cantidades que se presentan en el problema), finalmente procede con un esquema de transformación e igualación como en el problema anterior. De su explicación se infiere que considera la diferencia como parte de uno de los conjuntos "Luis tiene 39 menos muñequitos que Ana" y hay una ambigüedad en su entendimiento del significado de la expresión *menos que* vinculada a la diferencia, pues también dice: "Luis le gana por 39 a Ana". Descarta la utilización de una operación, pues ninguna de las ensayadas da un resultado igual al de su esquema *no algorítmico*. Nuevamente, no establece un vínculo entre la diferencia y la sustracción.

En el problema "Ahorro" (Luis ahorró 173 pesos, él tiene 45 pesos más que Ana. ¿Cuánto dinero ahorró Ana?), Juana entiende que hay que calcular el conjunto referente; para solucionar, analiza la relación entre ambos conjuntos y establece el recíproco de su relación. Infiere que, si el conjunto comparado tiene más, el conjunto referente debe tener menos e interpreta la expresión *más que*, relacionada con la diferencia, como una medida que relaciona dos conjuntos. Resta y comete un error de cómputo ($173 - 45 = 168$) del que no se percata, pues el resultado es congruente con su idea de que el conjunto referente tiene menos elementos, lo corrige cuando el entrevistador le pide que explique cómo hizo su algoritmo.

En el problema "Ahorro", Yola presenta una *representación canónica no algorítmica*. Agrega elementos desde la diferencia hasta el conjunto comparado para calcular el referente, comete un error, pues al contar no considera las centenas, luego ensaya el algoritmo y resta correctamente (173 − 45 = 128), pero lo descarta, pues el resultado no coincide con su esquema no algorítmico. En este problema, Yola sigue considerando la diferencia como parte de uno de los conjuntos y, pese a que ensaya la resta, no comprende su relación con el recíproco de la relación planteada entre los conjuntos.

En el problema "Corcholatas" (Luis juntó 96 corcholatas y Ana juntó 52 corcholatas menos que Luis. ¿Cuántas corcholatas juntó Ana?), Juana establece una *representación canónica algorítmica*. Identifica que se pregunta el valor del conjunto comparado e infiere que debe restar, pues éste tiene menos elementos. Ella, al igual que en el problema anterior, demuestra su entendimiento de que la diferencia es una medida que relaciona los conjuntos referente y comparado, y soluciona relacionando el recíproco de la relación planteada entre los conjuntos con la sustracción.

Yola presenta una *representación canónica algorítmica basada en un esquema no algorítmico*. Primero, para calcular el valor del conjunto comparado, agrega elementos desde el cardinal de la diferencia hasta el del conjunto referente y cuenta los elementos que agregó. Luego, infiere que debe restar, pues el resultado es menor que el valor del conjunto referente y dice que no se puede sumar "porque nada más son para que llegue a 96". Sustenta su solución en la igualación de los conjuntos y en la relación de orden indicada en el problema.

Solución a las situaciones de combinación de transformaciones

En estas situaciones, transformaciones elementales se relacionan temporalmente para dar lugar a una transformación compuesta. La dificultad varía dependiendo: del lugar que ocupe la incógnita, de si las transformaciones son de un solo tipo o combinadas y del número de transformaciones combinadas.

En el problema "Juego 1" (En un juego tenía 46 puntos y gané otros 65 y luego perdí 53 puntos. ¿Cuántos puntos tuve al final?), Juana establece una *representación canónica algorítmica* y no tiene dificultad para coordinar el empleo de los algoritmos de la suma y resta, y explicar el cálculo relacional implícito. Tiene un error de cálculo que corrige cuando rectifica su operación.

Yola también establece una *representación canónica algorítmica*. Pero, no obstante que identifica que debe combinar los algoritmos de suma y resta, tiene dificultades con el procedimiento de reagrupamiento de las centenas en la resta (111 − 53 = 158) y no obtiene el resultado esperado. Considera que el error se debe a la manera como sumó, por lo que vuelve a sumar invirtiendo los sumandos, con este resultado vuelve a restar, de nuevo comete el mismo error de reagrupamiento y obtiene el mismo resultado, finalmente señala que el resultado debe ser menor que el resultado de combinar las transformaciones positivas, pero que no sabe cómo hacer la resta. La entrevistadora la ayuda a llegar al resultado correcto. Yola no ha entendido totalmente la relación entre el procedimiento de reagrupamiento y las propiedades del sistema decimal

En el problema "Juego 2" (En un juego gané 174 puntos y luego perdí 248 puntos. ¿Cómo quedé al final?), Juana presenta una *representación canónica no algorítmica*. Indica desde el principio que "quedó debiendo puntos" y, para calcular la deuda, escribe el algoritmo de la resta, pero pone el número menor en el minuendo. Intenta resolver la resta, pero la interrumpe, pues no puede realizar el procedimiento de reagrupamiento en las centenas ($174 - 248 = 26$) e indica que "ya no se puede pedir prestado". Luego ensaya una suma ($174 + 248 = 422$) y descarta el resultado, pues obtiene un número mayor que el esperado, lo que no corresponde a su entendimiento. Vuelve a la resta e indica que el resultado correcto puede ser ése, pero cuando la revisa dice que "no se puede, poner esto ($174 - 248 = 26$), porque si no quedaría en deuda este resultado y estos números" e indica "que aunque había ganado perdió después y quedó debiendo puntos". Es importante señalar que en ningún otro problema Juana escribió inadecuadamente la resta y que, cuando se le sugería rectificar, ella identificaba sus errores al aplicar las reglas del algoritmo; enfrenta un conflicto, pues sabe que, en una transformación negativa, al estado inicial se le resta el final, pero en este problema el primero es menor que el segundo, por lo que, a su entender, la resta no puede realizarse.

Yola, por su parte, presenta una *representación no canónica*. Considera que la situación es imposible porque "dice que ganó 174 y que perdió 248 y dice que cómo quedó al final y entonces perdió todo". Cuando se le sugiere la posibilidad de quedar a deber, primero inventa una cifra, pero luego se retracta y sostiene que no se puede quedar a deber ni tampoco hacer una operación. Para Yola entender este problema es complicado, pues contradice su conocimiento acerca de una transformación negativa. Ella sabe que un decremento ocurre sólo cuando a una cantidad de elementos mayor se le quita una menor. De acuerdo con su argumento, al exceder la segunda cantidad a la primera, ya no se pueden quitar elementos y, por tanto, el resultado es cero. Quizá para Yola los números están ligados a objetos existentes y, por ello, la posibilidad de una deuda es inadmisible (si ya no hay elementos que quitar, ya no se puede quitar y el resultado es cero), por la misma razón no tiene sentido hacer una resta.

CONCLUSIÓN

Actualmente, en el ámbito de la enseñanza de solución de problemas, se destaca la necesidad de presentar al alumno *experiencias de aprendizaje significativas*. En el caso de los algoritmos, cabe preguntar: ¿qué los hace significativos? La cuestión no sólo se refiere a que se enseñen en el contexto de problemas referidos a situaciones de la "vida real", también hay que considerar que lo que vuelve significativo a un algoritmo es la posibilidad de que el alumno pueda atribuirle un significado; entonces es cuando el algoritmo efectivamente funciona como una herramienta para llegar a una solución que, desde el punto de vista del entendimiento del alumno, es verdadera. De acuerdo con Harel y Lesh (2003), los alumnos consideran válidos aquellos resultados que brindan evidencia de su congruencia con su entendimiento de un problema.

En el caso particular del algoritmo de la resta en el presente trabajo, se muestra, mediante un análisis de los procesos cognoscitivos del niño, por qué conocer el algoritmo no es suficiente para entender en qué situaciones emplearlo, aun cuando el problema se haya entendido de acuerdo con su significado canónico. Esto puede manifestarse de diversa maneras:

1. Hay un esquema de entendimiento canónico; sin embargo, en el esquema de solución no se emplea el algoritmo, pues no se reconoce su utilidad para encontrar la solución. Por ejemplo, Juana, quien, a pesar de conocer y aplicar adecuadamente el algoritmo de la resta en otros problemas, al enfrentar el problema "Juego 2" que tiene cantidades con valores negativos, termina por no hacer una resta, pues considera que ésta no es posible.
2. Hay un esquema de entendimiento canónico, pero la principal vía de solución es un esquema no algorítmico. Por ejemplo, en varios de los problemas, Yola privilegia un esquema no algorítmico que consiste en agregar elementos de uno en uno y luego contar los elementos agregados. Luego selecciona la resta, pues ésta coincide con el resultado que ya obtuvo mediante su esquema no algorítmico. Pero en varios problemas, primero suma y descarta este resultado por la falta de coincidencia y sólo entonces ensaya la resta.

Si reconocemos la realidad de los dos casos anteriores, la siguiente cuestión sería dilucidar qué es lo que los determina. Para empezar, habría que considerar que los problemas difieren en términos de su complejidad conceptual. Por ejemplo, en una situación de comparación, es más sencillo calcular la diferencia que calcular el valor del conjunto referente, cuando éste es menor que el comparado; igualmente, en una situación de transformación, es más sencillo calcular el estado final que una transformación positiva. Por consiguiente, al considerar las diferencias en la complejidad conceptual de los problemas, podríamos hablar de dos situaciones: cuando no se poseen conocimientos conceptuales para vincular el algoritmo con el entendimiento del problema, y cuando se poseen conocimientos que dificultan el vínculo entre entendimiento y la solución algorítmica.

En el primer caso, se encuentra que, para cada uno de los problemas planteados en las diversas situaciones, existen conocimientos que son clave, aunque éstos, si bien no son conceptos matemáticos en un sentido estricto, son igualmente importantes. Por ejemplo, se observa que Yola, pese a que posee un entendimiento adecuado del esquema de sustracción, sólo lo aplica como primera opción de solución cuando, a su entender, las situaciones hacen referencia a un decremento o a una relación de orden de un número mayor a uno menor; en los demás problemas se identifica que hay conceptos y relaciones que no ha entendido. En cambio, Juana emplea y justifica eficazmente el algoritmo.

En el perfeccionamiento de la solución de los problemas, el significado del algoritmo de la sustracción, como una relación de decremento entre cantidades, se vincula con otros significados como el de transformación negativa, diferencia como medida de relación entre conjuntos o la transformación de cantidades con valores negativos. Igualmente, como ya se señaló en el análisis de resultados, dependiendo de la situación, el algoritmo de la sustracción se vincula con otros conceptos que son clave para establecer su relación con la solución del problema (inversión de la transformación, recíproco de la relación planteada, diferencia como medida de relación, etc.). Los alumnos pueden comprender dichos conceptos y sus relaciones si se les da la oportunidad de construir un vínculo con su esquema no algorítmico (por ejemplo, agregar elementos de uno en uno).

¿Por qué ocurre lo anterior? Una explicación plausible es que los esquemas no algorítmicos imitan directamente las relaciones que el alumno ha identificado en el problema, lo que facilita que actúe a partir de ellas; por ejemplo, en un problema de comparación, representa a los dos conjuntos y luego agrega elementos al conjunto menor hasta igualarlo con el mayor y entonces establece una diferencia. Al principio, los alumnos encuentran un vínculo fijándose sólo en la forma (*v.g.* en el esquema algorítmico y en el no algorítmico se presentan los mismos números); gradualmente los alumnos encontrarán las relaciones a partir del entendimiento del significado de los números y de las relaciones entre estos significados. Tanto la posibilidad de reflexionar sobre la similitud de las soluciones algorítmicas y no algorítmicas como la posibilidad de discutirla con otros facilitan al niño entender esta relación y, a la larga, transitar a un esquema algorítmico. El proceso de tránsito constituye, sin duda, un objeto de investigación relevante para la enseñanza de las matemáticas.

En el segundo caso, cuando se poseen conocimientos que dificultan el vínculo entre entendimiento y solución, se encuentra que hay ciertas situaciones que se pueden solucionar con el algoritmo de la sustracción sólo si se dejan de lado ciertos entendimientos. Por ejemplo, se observa que Juana tiene un conocimiento amplio de la sustracción; sin embargo, cuando en el problema "Juego 2" se le presentan relaciones que implican cantidades negativas, no concibe la aplicación de la sustracción, pues a su entender las transformaciones sólo son factibles en la relación entre un estado inicial mayor y un estado final menor, tendrá que hacer a un lado este entendimiento para poder vincular la sustracción con el cálculo de valores negativos. Igualmente, en el caso de Yola, considerar que la resta se refiere a una transformación negativa dificulta entender su relación con el cálculo de la diferencia en las situaciones de comparación. Otro ejemplo es la dificultad de asociar un esquema de agregar elementos con la sustracción, pues en principio esto se asocia a la suma.

El trabajo de Brousseau (1997) sobre los obstáculos epistemológicos puede ser una explicación plausible de por qué ciertos entendimientos dificultan una solución. Brosseau señala que son limitaciones que impone el mismo desarrollo del conocimiento y que resultan de la aplicación de un conocimiento que con anterioridad y en otras situaciones ha sido exitoso.

Brousseau (*op. cit.*), retomando el trabajo de Duroux, señala que, para considerar un conocimiento como un obstáculo epistemológico, debe reunir cinco condiciones: *1)* Se refiere a un conocimiento específico. *2)* Este conocimiento es válido y efectivo en situaciones particulares. *3)* Fuera de estas situaciones, es falso, irrelevante o lleva a errores. *4)* Este conocimiento es *resistente* a contradicciones ocasionales y al establecimiento de un conocimiento más adecuado, es necesario también explicar por qué el anterior no es adecuado *5)* Aun después de que se ha demostrado que es inadecuado, persiste. Para ejemplificar lo anterior, Brosseau menciona el caso de la relación entre el entendimiento de los números negativos y la idea de que los números deben ser la medida de algo, conocimiento que es válido para muchas situaciones, pero una limitante para comprender los números negativos.

Considerando las respuestas de las niñas ante algunos problemas, es factible pensar que algunas de las respuestas de Juana y Yola pueden entenderse como obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, en el problema "Juego 2", se observa que Yola considera sólo factible un resultado de cero, puesto que para ella, *ya no queda nada que contar*. Igualmente, la idea de sustracción como transformación negativa le dificulta el entendimiento de la relación de la sustracción con la diferencia. En Juana se observa también un obstáculo cuando intenta calcular la deuda partiendo de su conocimiento de la relación entre la sustracción y las relaciones entre un estado inicial, una transformación negativa y un estado final. Desde luego, según Brousseau (*op. cit.*), para demostrar que los ejemplos anteriores son obstáculos, habrá que tener pruebas de los cinco criterios marcados y de la regularidad de su aparición entre los alumnos.

Brousseau indica que, para superar el obstáculo, es necesario permitir que el alumno enfrente situaciones en las que la aplicación de un conocimiento que ya posee y es falso o inapropiado para la situación lo lleve a un conflicto que dé lugar a la construcción de un nuevo conocimiento. De acuerdo con el presente informe, también ayudaría promover que el alumno descifre y explicite las relaciones entre su esquema no algorítmico y el algorítmico.

Retomando la idea de crear situaciones de aprendizaje significativo de un algoritmo, un punto de partida es entender cómo está entendiendo un alumno un problema en el momento de realizarlo. *Entender cómo están entendiendo los alumnos* se facilita si el docente tiene un referente claro de cómo evoluciona la comprensión del vínculo algoritmo-problema, así como la influencia de los aspectos conceptuales que dan lugar a que los problemas tengan un diferente nivel de complejidad. En este trabajo se ha tratado de mostrar que las diferencias de entendimiento entre los alumnos se pueden analizar: *1)* considerando la complejidad conceptual de los problemas; *2)* considerando que la representación del problema está constituida por un esquema de entendimiento y uno de solución, y que la comprensión de los conceptos es medular para vincular ambos esquemas; *3)* considerando la importancia de los esquemas no algorítmicos, pues funcionan como puentes para la comprensión del empleo del algoritmo.

Peltier (2003) señala que existe una fuerte imbricación entre el significado que se atribuye a un problema y los procedimientos de resolución que los alumnos ponen en funcionamiento al solucionarlo. Coincidente con este planteamiento, en el presente trabajo se ha descrito cómo, al solucionar un problema, un esquema de entendimiento lleva a esquemas particulares de solución, pero también se ha mostrado que los esquemas de solución están supeditados al conocimiento de conceptos específicos, de tal suerte que no basta conocer un algoritmo para entender su significado en un problema. En un trabajo anterior

(Flores, Farfán y Ramírez, 2004), se mostró que se facilita el vínculo entre el entendimiento canónico y la solución algorítmica, si el alumno procede de acuerdo con una estrategia que promueve un puente entre una solución no algorítmica y una algorítmica, y si se cuenta con la ayuda de un mediador (el profesor o un compañero) que favorece el análisis de este vínculo.

Aún no conocemos cabalmente cuáles aspectos de la historia de cada alumno determinan las diferencias interindividuales en el entendimiento del vínculo algoritmo-problema. En este trabajo se ha tratado de mostrar que estas diferencias se relacionan con el funcionamiento cognoscitivo, específicamente con el entendimiento de conceptos y relaciones entre conceptos que se establecen en las diferentes representaciones y se ha tratado de argumentar a favor de la consideración de estas diferencias en la adaptación de la enseñanza. Desde luego, esto constituye un reto para la educación, pues si bien se busca el beneficio de individuos, la enseñanza en las aulas se dirige a grupos. Considerando lo anterior, trabajos como el presente pueden ser de utilidad para modificar las concepciones de los docentes y para diseñar actividades de enseñanza.

El algoritmo es una herramienta que la humanidad desarrolló para facilitar el cálculo numérico en problemas matemáticos que se presentan en situaciones cotidianas. La historia de las matemáticas demuestra que, para su invención, hubo que entender conceptos y principios acerca de los números, sus relaciones y sus operaciones y vincular este conocimiento con otros conocimientos que no son matemáticos y están expresados en un lenguaje natural, pero que son igualmente importantes. Si reconocemos que este proceso es similar al que siguen los alumnos al comprender los procedimientos de los algoritmos y su empleo, estaremos en posibilidad de entender por qué no es razonable querer enseñar a restar, multiplicar o dividir, tratando esto como si fuera un conocimiento que contiene en sí mismo la explicación de su utilidad.

ANEXO 1: DESCRIPCIÓN DE LO PROBLEMAS PLANTEADOS

Situación	Problema
Parte–parte–todo Incógnita en la medida de uno de los conjuntos elementales.	CANICAS Joaquín tiene 85 canicas, 37 son payasitos y las demás son munditos. ¿Cuántas canicas son munditos?
Estado–transformación–estado Incógnita en la transformación Transformación positiva.	VOLADOS Luis tenía 134 estampas en el recreo jugó volados y ganó unas. Al terminar el recreo tenía 151 estampas. ¿Cuántas estampas ganó Luis en los volados?
Estado–transformación–estado Incógnita en la transformación Transformación negativa	APUESTA Carlos tenía 145 carritos, en el recreo apostó unos. Al terminar el recreo tenía 79 carritos. ¿Que pasó en la apuesta?
Estado–transformación–estado Incógnita en el estado inicial Transformación positiva.	CUMPLEAÑOS Antes de su cumpleaños Ana tenía algo de dinero en su alcancía. Después su abuelita le regaló 88 pesos y así juntó 152 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana antes de su cumpleaños?
Comparación entre dos conjuntos Incógnita en la diferencia Conjunto referente menor que el comparado	PESOS Luis tiene 124 pesos y Ana tiene 153 pesos. ¿Cuánto dinero más que Luis tiene Ana?
Comparación Incógnita en la diferencia Conjunto referente mayor que el comparado	MUÑEQUITOS Ana tiene 76 muñequitos y Luis tiene 37 muñequitos. ¿Cuántos muñequitos menos que Ana tiene Luis?.
Comparación Incógnita en el conjunto referente Conjunto referente menor que el comparado	AHORRO Luis ahorró 173 pesos, él tiene 45 pesos más que Ana. ¿Cuánto dinero ahorró Ana?
Comparación Incógnita en el conjunto comparado Conjunto referente mayor que el comparado	CORCHOLATAS Luis juntó 96 corcholatas y Ana juntó 52 corcholatas menos que Luis. ¿Cuántas corcholatas juntó Ana?
Combinación de transformaciones primera y segunda mayor que la tercera	JUEGO 1 En un juego tenía 46 puntos y gané otros 65 y luego perdí 53 puntos. ¿Cuántos puntos tuve al final?
Combinación de transformaciones Primera menor que la segunda	JUEGO 2 En un juego gané 174 puntos y luego perdí 248 puntos. ¿Cómo quede al final?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A., D. Block y A. Carvajal (2003), "Investigaciones sobre educación preescolar y primaria", en A. D. López y Mota (coord.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje. Tomo I,* México, Consejo Mexicano de Investigación Educativa, pp. 49-170.

Brun, J. (1996), "The Theory of Conceptual Fields and its Applications to the Study of Systematic Errors in Written Calculations", en H. Mansfield, N. A. Pateman y N. Bednarz (eds.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children: International Perspectives on Curriculum,* Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 120-134.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990,* editado y traducido por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (1991), *En la vida diez, en la escuela cero,* México, Siglo XXI Editores.

Dantzing, T. (1971), *El número: Lenguaje de la ciencia,* Buenos Aires, Hobbs (traducido del inglés, 1954).

Flores, Macías, R.C. (2003), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación,* Aguascalientes, México, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores, R. C., A. Farfán y C. Ramírez (2004), "Enseñanza de una estrategia para la solución de problemas de adición y sustracción en alumnos con problemas en el aprendizaje de las matemáticas", *Revista Mexicana de Psicología,* vol. 21, núm. 2, pp. 179-189.

Ginsburg, H.P. (1996), *Entering the Child's Mind: The Cognitive Clinical Interview in Psychological Research and Practice,* Cambridge, MA, Cambridge University Press.

Harel, G. y R. Lesh (2003), "Local Conceptual Development of Proof Schemes in a Cooperative Learning Setting", en R. Lesh y H.M. Doerr (ed.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 359-382.

Nunes, T. y P. Bryant (1998), *Las matemáticas y su aplicación la perspectiva del niño,* México, Siglo XXI Editores (traducido del inglés, 1996).

Peltier, M. (2003), "Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 3, pp. 29-55.
Secretaría de Educación Pública (2002), *Diagnóstico y competencias, tercer año*, México, SEP.
Vergnaud, G. (1987), *Conclusion Chapter*, en C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 227-232.
—— (1990), "Epistemology and Psychology of Mathematics Education", en P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, Gran Bretaña, Cambridge University Press, pp. 14-30.
—— (1996), "The Theory of Conceptual Fields", en L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 219-240.
—— (1997a), *El niño, las matemáticas y la realidad*, México, Trillas (traducido del francés, 1985).
—— (1997b), "The Nature of Mathematical Concepts", en T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, Hove, Reino Unido, Psychology Press, pp. 5-28.
—— (2000), "Constructivism et apprentissage des mathematiques", Trabajo presentado en la Conferencia sobre Constructivismo en Ginebra, Suiza.
Vergnaud, G. y M. Récopé (2000), "De Revault d'allonnes à une théorie du schème aujourd'hui", *Psychologie Française*, vol. 45, núm. 1.

DATOS DE LA AUTORA

Rosa del Carmen Flores Macías
Universidad Nacional Autónoma de México, México
rcfm@servidor.unam.mx