

La Enseñanza del Algoritmo de la División Aplicada a la Solución de Problemas¹

María Cristina Téllez Gutiérrez

Los algoritmos son una herramienta cultural que se ha desarrollado como una forma de ayudar a que la gente resuelva de manera más eficiente los problemas cotidianos a los que se enfrenta, sin embargo se observa que los alumnos a pesar de conocer los algoritmos en muchas ocasiones desconocen las situaciones apropiadas para su aplicación y no saben aplicarlos de manera correcta para resolver problemas de la vida diaria.

Se ha observado que entre las principales causas de lo anterior se encuentran las siguientes (Flores, 2005): se enseña la definición del algoritmo (suma resta, multiplicación, división), se pasa después a su ejercitación y por último a su aplicación para solucionar problemas; se enfatiza más el aprendizaje del procedimiento que el significado del algoritmo; no se valoran los procedimientos no algorítmicos, por lo que no se aprecian las respuestas espontáneas de los alumnos; y asimismo tampoco se reconoce a los errores como valiosos para comprender los procesos de comprensión de los alumnos y como una oportunidad de aprender.

Todo lo anterior tiene como consecuencia que los alumnos no sepan reconocer qué algoritmo emplear para resolver un problema, que se sientan limitados para emplear formas no algorítmicas alternativas para solucionar un problema y finalmente que la comprensión que tienen de los algoritmos y de su utilidad resulte superficial (Marton y Neuman, 1996; Flores, 2005).

En el caso del algoritmo de la división, las dificultades de los alumnos se manifiestan en mayor medida debido a que el aprendizaje de la división es el más difícil de todos los algoritmos ya que cuenta con características en su resolución que la diferencian de las otras operaciones, entre éstas se encuentran las siguientes: se lleva a cabo de izquierda a derecha mientras que todos los demás se ejecutan de derecha a izquierda, aporta dos resultados (cociente y residuo) mientras que en los otros se busca un solo resultado, tiene una fase de estimación o de tanteo que no existe en las demás operaciones, requiere que los otros

¹ Se agradece el apoyo brindado por la matemática Amaya Olaizola Petrich en la elaboración de este trabajo

algoritmos estén automatizados, y además conlleva ciertas prohibiciones como que el residuo no debe ser mayor que el cociente (Defior, 2000).

Considerando las dificultades que los alumnos presentan para el aprendizaje del algoritmo de la división y para la corrección de los posibles errores que se manifiestan más comúnmente entre los estudiantes, en el presente trabajo se presenta una guía para la identificación de los errores y una propuesta alternativa para la enseñanza de la división que pretende favorecer que los alumnos comprendan la noción de división así como su relación con el algoritmo y que de esta manera se percaten de sus errores y eventualmente puedan evitarlos o corregirlos.

Guía para la evaluación e identificación de los errores

Para facilitar la identificación de las dificultades y fortalezas de los alumnos a continuación se presenta una descripción de los pasos así como las acciones correspondientes a cada uno que deben seguirse para solución de un algoritmo de división.

División	
Pasos para su resolución	Acciones requeridas
1) $13 \overline{) 25,78}$	1) Determinar las primeras cifras del divisor que han de dividirse
2) $13 \overline{) 2578}$	2) Realizar una estimación de cuántas veces el divisor (13) cabe en las primeras cifras del dividendo (25).
3) $13 \overline{) 2578}$ 1	3) Multiplicar el número obtenido por el divisor (1×13)
4) $13 \overline{) 2578}$ 13 12	4) Colocar el resultado debajo del dividendo y restar
5) $13 \overline{) 2578}$ 13 127	5) Bajar el siguiente dígito del dividendo
6) $13 \overline{) 2578}$ 13 127	6) Realizar nuevamente una estimación
7) $13 \overline{) 2578}$ 13 127 117 10	7) Repetir los pasos sucesivamente

El primer paso para comenzar la enseñanza de la división que se propone consiste en identificar los errores que presentan los alumnos en la resolución del algoritmo, así como también las fortalezas con las que cuenta.

Se ha visto que los errores que cometen los niños en las operaciones matemáticas no son aleatorios o producto de la falta de atención, sino que señalan la presencia de “vicios” en el procedimiento que aparecen sistemáticamente, esto se da porque los niños al no comprender plenamente las bases matemáticas de las rutinas para resolver el algoritmo inventan estrategias simplificadoras que son incorrectas, lo que ocurre en algunos casos es que cuando los niños se enfrentan a una situación en la que no saben cómo actuar tratan de salir de ella inventando un modo de operar a partir de los conocimientos y procedimientos que ya poseen (Defior, 2000).

A continuación se presentan los errores típicos más comunes que se observan en la resolución de la división, los cuales se clasifican en tres grandes categorías (Brun, 1996) :

1) Dificultad en la identificación de las relaciones numéricas:

Son generados principalmente por desconocer las relaciones numéricas entre dividendo, divisor, cociente y residuo.

Algunos de los problemas más frecuentes se dan en los siguientes casos:

Problemas cuando el dividendo es igual que el divisor

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 94} \\ \underline{9} \\ 04 \end{array}$$

Cuando el residuo en el dividendo es menor que el divisor

$$\begin{array}{r} 2 \\ 42 \overline{) 856} \\ \underline{84} \\ 16 \end{array}$$

Cuando el residuo parcial es más grande que el divisor

$$\begin{array}{r} 85 \\ 7 \overline{) 6036} \\ \underline{56} \\ 43 \\ \underline{42} \\ 8 \end{array}$$

Cuando el residuo es más pequeño pero cercano al divisor

$$\begin{array}{r} 2 \\ 39 \overline{) 817} \\ \underline{78} \\ 37 \end{array}$$

2) Problemas con las operaciones básicas al dividir

- Cometer errores específicos en suma, resta o multiplicación
- Manejo inadecuado de las tablas de multiplicar.
- Olvidar “llevar”.
- Estimaciones incorrectas.

3) Dificultad en el orden de los pasos y en la colocación de los datos en el algoritmo.

- Colocar los datos en el lugar incorrecto.
- Alterar el orden de los pasos.
- Crear combinaciones propias de las reglas.

La identificación de los errores o dificultades es un paso crucial, y una forma en la que se puede hacer de manera objetiva es preguntándole al alumno cómo resolvió la operación o el problema o bien, pidiéndole que mencione en voz alta el procedimiento mientras lo realiza ya que de otra manera se pueden hacer interpretaciones erróneas si únicamente se trata de inferir el procedimiento que el alumno siguió.

A continuación se muestran algunos ejemplos de errores comunes que pueden presentar los alumnos.

$$\begin{array}{r} 50 \\ 7 \overline{) 370} \\ \underline{350} \end{array}$$

No realiza la operación completa, suspende después del primer cociente parcial

$$\begin{array}{r} 80 \\ 9 \overline{) 729} \\ \underline{720} \\ 9 \end{array}$$

Deja el residuo igual o más grande que el divisor

$$\begin{array}{r} 20 \\ 30 \overline{) 60} \end{array}$$

Confunde el valor posicional del cociente, por lo que añade un 0 extra

$$\begin{array}{r} 30 \\ 4 \overline{) 1203} \\ \underline{1200} \\ 3 \end{array}$$

Omite el cero en el cociente, por lo que coloca los números en el lugar incorrecto

Una vez que se han identificado cuáles son los errores que comete un alumno y se conocen los pasos que siguió para realizar la división, se podrá identificar en dónde se encuentra el origen de tales errores, esto es, si son debidos a fallas en el conocimiento y comprensión del sistema decimal, como son dificultad para comprender cómo se agrupan unidades, decenas, centenas, etc. y el valor relativo de las unidades o debidos a alguna dificultad en la realización de las operaciones básicas que empleó para solucionar la división (suma, resta, multiplicación), al desconocimiento o falla en el procedimiento para la resolución del algoritmo, debido a que no ve al algoritmo como un todo y lo reduce al seguimiento de una secuencia de pasos que puede confundir fácilmente, o bien a una incorrecta comprensión de la situación que se le plantea.

Así como es necesario identificar los errores o dificultades que presenta un alumno, también es importante conocer cuáles son las fortalezas con las que cuenta, ya que éstas nos permitirán tener una base para partir en la intervención. Las fortalezas de un alumno pueden ser de diversa índole, esto es, por ejemplo que tenga un manejo adecuado de las tablas de multiplicar, que resuelva con facilidad sumas, restas y/o multiplicaciones, que conozca el procedimiento para resolver la división

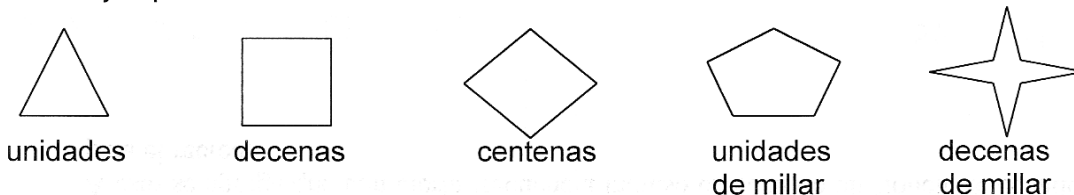
De igual manera es importante considerar que el alumno tenga una disposición favorable hacia la tarea y que se sienta seguro del apoyo que recibirá.

A continuación se presenta la propuesta para la enseñanza de división asociada con el algoritmo y aplicada a la solución de problemas.

Propuesta De Trabajo Para La Enseñanza De La División

Para las sesiones de trabajo se propone el empleo de fichas de hule espuma o material imantado de diferentes colores o figuras con las cuales se representen las unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc.

Ejemplo:

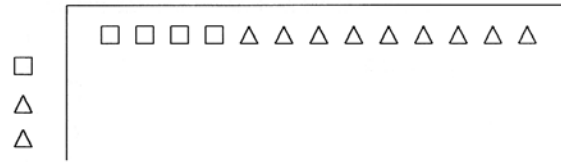


Ejemplo:

División en algoritmo

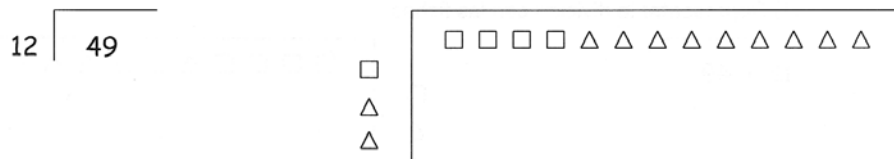
$$12 \overline{) 49}$$

División con material



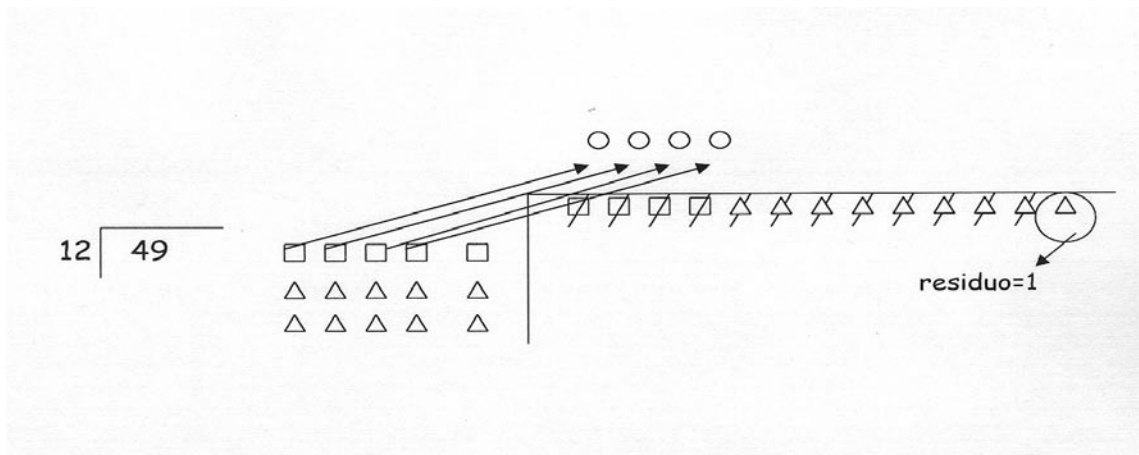
El procedimiento para resolver la división es el siguiente:

1) Representar la división con las fichas



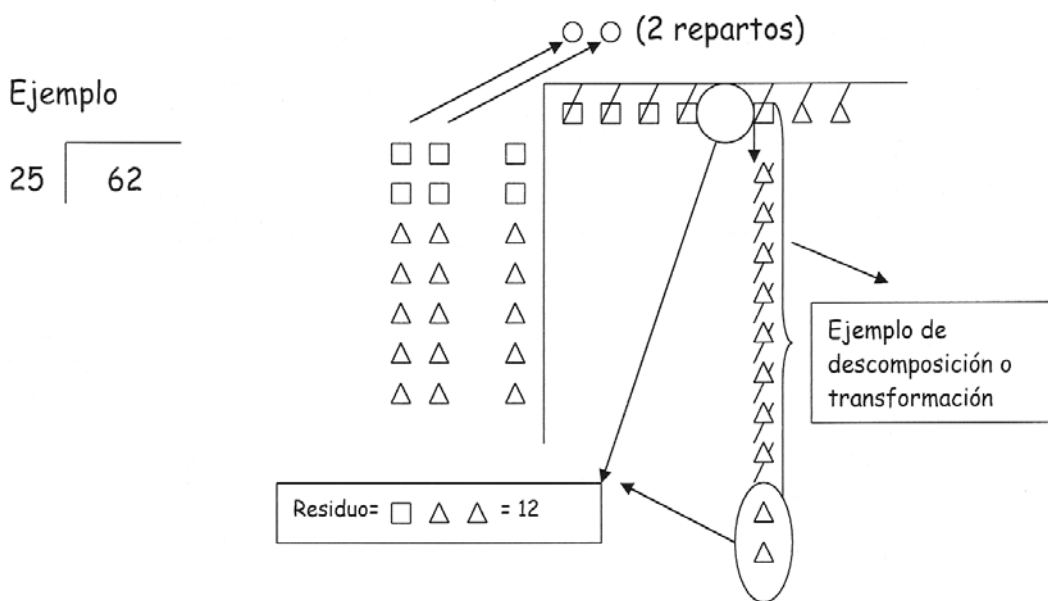
2) Comenzar a repartir equitativamente

- a) A cada ficha del divisor debe corresponder exactamente una igual de las del dividendo.
- b) Las fichas que se van repartiendo se van colocando a un lado del divisor y por lo tanto van “desapareciendo” del dividendo, mostrando así de manera clara el reparto
- c) Cada reparto se representará con una pequeña marca (en este caso círculo) ○ en el lugar correspondiente al cociente, para llevar la cuenta del número de repartos realizados.



d) Además las fichas que han sido repartidas estarán siempre presentes para poder realizar una comprobación al llegar al resultado final

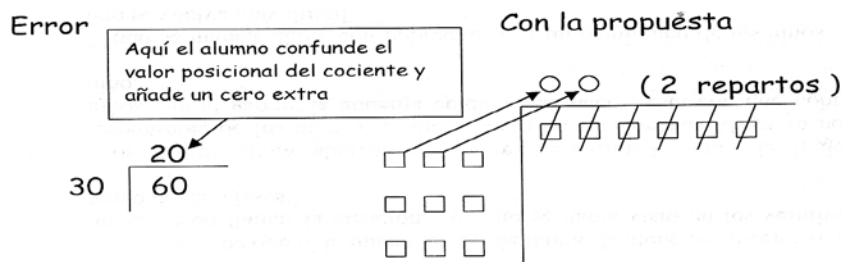
e) En los casos en los que la cantidad de unidades no sea suficiente para continuar repartiendo y existan aún decenas sin repartir, una decena o las que sean necesarias podrán ser descompuestas en las unidades correspondientes. (Lo mismo pasará en el caso de las centenas que podrán descomponerse en decenas o las unidades de millar en centenas).



A continuación se presentan algunos ejemplos de errores que presentan los alumnos, así como la forma en que la propuesta puede apoyar para la corrección de los mismos.

- Ayuda a identificar la agrupación de unidades en decenas, de las decenas en centenas, etc. con lo que disminuye la posibilidad de confusiones y de omisiones en el cociente.

Ejemplo:



En este ejemplo, el alumno podrá darse cuenta de que el número de repartos que pueden realizarse es 2 y no 20.

- Evita confusiones entre el número del todo (dividendo) y el número de partes en las que ha de dividirse (divisor) porque se hace la distinción entre “lo que estoy repartiendo y en cuántas partes”.

Error

Aquí, al ser menor el dividendo que el divisor, el alumno invierte y divide 42 entre 16 y obtiene como resultado 2

Con la propuesta

En este ejemplo, al alumno le será más fácil identificar cuáles son los que está repartiendo y evitará que realice inversiones entre dividendo y divisor.

- Permite identificar los repartos que ya hice, cuántos me tocaron y cuántos me sobraron con más facilidad.

Error

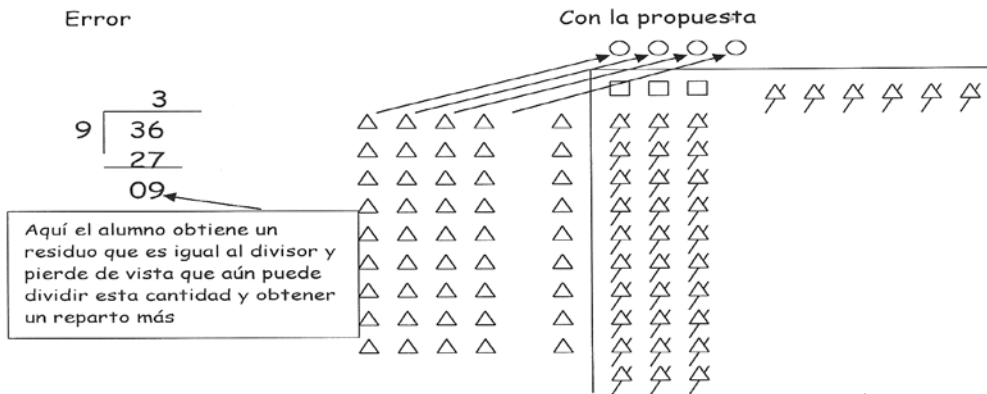
En este caso el alumno cometió 2 errores: al multiplicar $3 \times 3 = 6$ y al “llevar” cuando no debía, por lo que termina la división y no identifica que su resultado no es correcto.

Con la propuesta

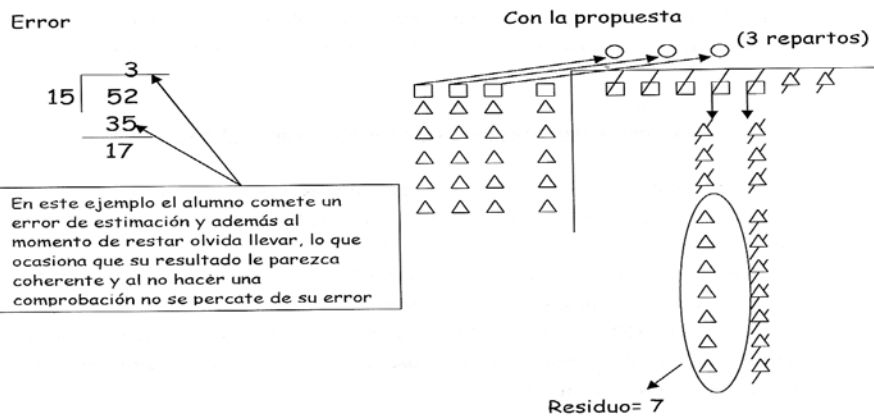
(3 repartos)

residuo 1 decena=10u

- Permite tener claridad en cuanto al residuo “lo que me sobra pero que ya no me alcanza para repartir más de manera equitativa” (al menos en unidades), evitando así residuos que son iguales o mayores que el divisor.

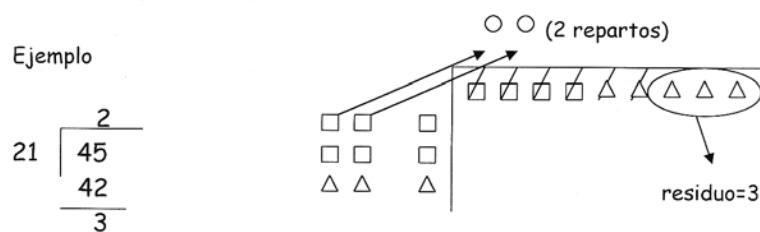


- Permite hacer una comprobación fácil del resultado obtenido.



- Puede facilitar el paso a las divisiones con punto decimal y la comprensión del resultado de éstas en números fraccionarios.

Puede llevar a la reflexión de que “para poder repartir equitativamente lo que me sobra, podría fraccionarlo en cantidades menores a la unidad”



- Permite no perder de vista a la división como un todo al no tener que seguir una secuencia de pasos que les carecen de sentido a los alumnos

Secuencia de la sesión de trabajo

A continuación se describe por pasos la secuencia de una sesión de trabajo, proponiendo que éstas pueden realizarse en pequeños grupos de 3 o 4 alumnos.

- PLANTEAR LA SITUACIÓN PROBLEMA

LO QUE HACE EL TUTOR	LO QUE HACE EL ALUMNO
a) Presenta a los alumnos un problema para resolver. b) Pregunta a los alumnos cómo podría resolverse el problema, c) Invita a quien desee escribir el algoritmo correspondiente. d) Pide que identifiquen cuál es el dividendo y cuál el divisor. e) En sesiones posteriores puede invitar a los alumnos a que sean ellos los que planteen el problema o las cantidades.	a) Escucha el problema e identifica los datos. b) Explican el problema y dan opciones para su solución c) Alguno de los alumnos escribe el algoritmo en el pizarrón. d) Identifica el dividendo y el divisor, si lo requiere sus compañeros lo apoyan. e) En sesiones posteriores plantean ellos los problemas y se sigue el mismo procedimiento.

Problemas que pueden surgir:

- a) Que los alumnos confundan el dividendo con el divisor al colocar los datos en el algoritmo, lo cual puede ocurrir principalmente en las primeras sesiones.

Solución: Clarificar el problema a través de identificar qué es lo que se está repartiendo, lo cual constituye el dividendo y entre cuántos se realizará el reparto lo que compone el divisor.

➤ REPRESENTAR CANTIDADES

LO QUE HACE EL TUTOR	LO QUE HACE EL ALUMNO
<p>a) En la primera sesión presenta a los alumnos el material y explica la equivalencia de los colores de las fichas.</p> <p>b) También explica a los alumnos cómo pueden representarse con las fichas las cantidades del problema.</p> <p>c) En las sesiones siguientes, invita a quien desee representar el dividendo correspondiente y verifica las respuestas.</p> <p>d) Pide que otro alumno represente el divisor.</p> <p>e) Pregunta a los alumnos si están de acuerdo con las representaciones y en todo momento verifica que todos estén comprendiendo.</p>	<p>a) Identifica las unidades, decenas y/o centenas de cada cantidad de las que consta el problema.</p> <p>b) Quien lo decida representa en el pizarrón el dividendo, para lo cual debe tomar el número de fichas correspondientes de cada color (Por ejemplo, para representar el 84 necesitará 8 fichas rosas y 4 fichas amarillas)</p> <p>c) Otro alumno representará el divisor de la misma manera.</p> <p>Los datos se representan en la misma forma empleando el símbolo representativo del algoritmo de la división.</p>

Problemas que pueden surgir:

a) Que los alumnos confundan los colores de las fichas y representen las unidades con rosa, por ejemplo.

Solución: Tener siempre a la vista en el pizarrón las fichas representativas para unidades, decenas, centenas, etc.

b) Que los alumnos no tengan claro en una cantidad de cuántas unidades o decenas consta ésta.

Solución:

Llevar a cabo actividades de familiarización con equivalencias

➤ INICIAR EL REPARTO

LO QUE HACE EL TUTOR	LO QUE HACE EL ALUMNO
<p>a) Explica a los alumnos cómo realizar el reparto, que a cada ficha del divisor corresponderá una igual de las del dividendo.</p> <p>b) En las primeras sesiones puede modelar el primer reparto, el cual se colocará al lado del divisor y se representará en el lugar del cociente.</p> <p>c) En las sesiones siguientes, invita a quien desee realizar los primeros repartos y procura que los alumnos se alternen para realizar los repartos subsecuentes.</p> <p>d) Hace notar a los alumnos que el dividendo va disminuyendo conforme se realiza cada reparto.</p> <p>e) Se cerciora de que cada reparto es realizado y marcado correctamente en el lugar correspondiente al cociente</p> <p>f) Verifica siempre las respuestas y cuando hay duda cuestiona a los alumnos para identificar el origen de éstas.</p>	<p>a) Quien lo decida realiza en el pizarrón el primer reparto, para lo cual debe tomar del dividendo las fichas correspondientes y colocarlas al lado del divisor.</p> <p>b) Los otros alumnos alternadamente realizarán los demás repartos.</p> <p>c) Cada reparto que se realice deberán marcarlo en el cociente.</p>

Problemas que pueden surgir:

a) Que los alumnos no realicen completo cada reparto.

Solución: Con el material empleado es fácil notarlo y verificarlo, ya que cada reparto es visible en todo momento, por lo que al alumno hay que recordarle que para dar por terminado un reparto debe estar completo y marcarlo adecuadamente para poder continuar con los siguientes.

➤ REALIZAR TRANSFORMACIONES

LO QUE HACE EL TUTOR	LO QUE HACE EL ALUMNO
<p>a) Cuando se presenta una situación en el momento del reparto en la que el número de unidades del dividendo, por ejemplo, no sea suficiente para repartir entre las unidades del divisor, el tutor pregunta a los alumnos posibles soluciones y los apoyará para llegar a la explicación de cómo realizar las transformaciones, que cada decena corresponde a 10 unidades, por lo cual podrá ser transformada cuando sea requerido en el momento del reparto.</p> <p>b) Siempre que se presente una situación similar en la que sea necesario transformar decenas en unidades, centenas en decenas, etc. Si el alumno que está realizando el reparto tiene alguna dificultad o duda, se buscará el apoyo de los compañeros y en caso de ser necesario el tutor apoyará a los alumnos para realizar las transformaciones necesarias</p>	<p>a) Cuando se enfrentan a una situación en la que requieran hacer una transformación, deberán realizarla físicamente es decir, eliminar del dividendo una ficha rosa por ejemplo, y poner en su lugar 10 fichas amarillas para poder continuar con los repartos.</p> <p>b) Cuando uno de los alumnos no sabe u olvida lo que se debe hacer, será apoyado por sus compañeros o por el tutor.</p>

Problemas que pueden surgir:

a) Que al alumno no sepa qué hacer cuando ya no tiene fichas correspondientes a las cantidades que necesita para continuar con el reparto, pero que sí cuente con fichas de cantidades mayores.

Solución: Preguntarle cuánto tiene aún en el dividendo y cuánto necesita para hacer un reparto y con base en sus respuestas hacerle notar al alumno que la cantidad total que tiene

en el dividendo aún le alcanza para repartir al divisor, hasta llegar a comprender que la cantidad que todavía tiene puede ser descompuesta en sus cantidades correspondientes por ejemplo, una decena se puede descomponer en 10 unidades, por lo que una ficha rosa puede convertirse en 10 amarillas, que es su equivalente).

➤ **RESOLVER EL ALGORITMO Y VERIFICAR CANTIDADES Y RESULTADOS**

LO QUE HACE EL TUTOR	LO QUE HACE EL ALUMNO
<p>a) Al concluir el reparto, invita a un alumno a realizar el algoritmo en el pizarrón.</p> <p>b) Les hace notar a los alumnos que pueden apoyarse con los datos que obtuvieron en el reparto para realizar la estimación.</p> <p>c) Pide a todos los alumnos que apoyen al compañero que está escribiendo.</p> <p>d) Si hay alguna duda, apoya a los alumnos.</p> <p>e) Cuando se llega a los primeros resultados, invita a los alumnos a verificar la cantidad repartida.</p> <p>f) Por ejemplo, para la siguiente división: $89/12$ el resultado de multiplicar el cociente por el divisor (12×7) es 84, lo cual puede verificarse contando las fichas repartidas y sumando las cantidades que representan con lo cual pueden ver de manera clara cuál fue la cantidad que repartieron, cuántos repartos hicieron y cuánto les sobró.</p>	<p>a) Un alumno resuelve el algoritmo, con apoyo de los datos del reparto y con apoyo de sus compañeros y del tutor.</p> <p>b) Entre todos verifican los resultados parciales comparando los resultados del reparto y del algoritmo.</p> <p>c) Cuentan las fichas repartidas, verifican el número de repartos (cociente) y las fichas que les sobraron (residuo).</p> <p>d) Finalmente los alumnos corroboran que su resultado es acorde con la situación del problema planteado.</p>

Bibliografía

Brun, J. (1996) The theory of conceptual fields and its application to the study of systematic errors in written calculation. En H. Mansfield, N. Pateman, y N. Bednarz, (Eds) *Mathematics for tomorrow's young children* (pp 120 – 134). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Defior, S.(2000) *Las dificultades de aprendizaje: un enfoque cognitivo*. Madrid:Aljibe

Flores, M. R.C. (2005) El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática* 17 (2) 7-34.

Marton, F. y Neuman,D.(1996) Phenomenography and children's experience of division.

En Steffe, L., Nesher,P. Cobb, P. (Eds) *Theories of Mathematical Learning* (315-334) New Jersey: LEA. Publishers .