Memorias de la **XII** Conferencia Interamericana de Educación Matemática

Historia y Prospectiva de la Educación Matemática

Eduardo Mancera Martínez
César Augusto Pérez Gamboa

CIAEM
Comité Interamericano de Educación Matemática

edebémexico

Historia y Prospectiva de la Educación Matemática

XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática

Editores

Eduardo Mancera Martínez

César Augusto Pérez Gamboa

CIAEM
Comité Interamericano
de Educación Matemática

D.R. © 2007 por Edebé Ediciones Internacionales, S. A. de C.V.
Ignacio Mariscal 8. Col. Tabacalera.
06030 México, D.F.
editorial@edebe.com.mx
Director General: Manuel Borbolla Pérez-Porrúa.
Director Editorial. Mariano de la Fuente Fernández.
Edición: César Augusto Pérez Gamboa.

© Eduardo Mancera Martínez y César Augusto Pérez Gamboa

Primera edición: julio de 2007.
ISBN: 978-968-9166-00-9

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial Mexicana. Reg. No 2820.
Impreso en México

Quedan rigurosamente prohibidas, sin autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas por las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos público.

Índice de contenidos

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM,pp.61-68. © 2007 Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V. Impreso en México.

Enseñanza del álgebra mediante representaciones gráficas en la solución de problemas

Rosa del Carmen Flores Macias, Raúl Castellanos Cruz
Universidad Nacional Autónoma de México

Palabras clave: Álgebra, matemáticas y Solución de problemas.

La enseñanza del álgebra debe considerar el proceso de aproximación y comprensión de dos conocimientos nuevos para los alumnos: el simbolismo específico y la resolución de problemas por medio del uso ecuaciones (Alcalá, 2002).

Diferentes autores (Lins citado por Kieran, 1989; Kieran y Filloy, 1989; MacGregor y Stacey, 2000; Pizón y Gallardo 2000) señalan las siguientes dificultades de los alumnos al comprender el lenguaje algebraico:

Generalización equivocada de procedimientos aritméticos. Uso de procedimientos aritméticos, haber aprendido a pensar y operar con números específicos es una de las principales fuentes de dificultad.

Resistencia a emplear ecuaciones. En la primaria los alumnos casi nunca usan ecuaciones por lo que cuando se les pide representar los problemas con una ecuación, los alumnos primero lo resuelven y luego intentar adivinar la ecuación.

Dificultades en el empleo de los signos y expresiones: dos dificultades centrales en el aprendizaje del álgebra, son la "condensación" (cuando se tiene más de un significado para una expresión) y la "evaporación" (una pérdida del significado de los símbolos).

Falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problemas, la confianza en métodos intuitivos y el que se centren en conseguir "de alguna forma" la respuesta va en contra que presten atención al método que utilizan.

Equivocaciones en la interpretación de las variables. La experiencia de los niños en la escuela con las letras de ecuaciones se reduce a fórmulas como A = b x h, esto puede provocar que los alumnos traten las letras en ecuaciones como incógnitas con un valor fijo más que como números generalizados o como variables.

Desconocimiento del significado de la igualdad. Los alumnos manejan el signo de igual como un mandato operacional, una señal de hacer algo. Ignoran el significado de la igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación.

Omisión parcial de la incógnita. Los estudiantes no perciben la incógnita en el segundo miembro en ecuaciones, por ejemplo en: $x + 2x = 3 + x$, ignoran la "x" del miembro derecho y presentan como resultado de la ecuación anterior, $3x = 3$.

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM,pp.61-68. *© 2007 Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V. Impreso en México.*

Interpretación equivocada de la concatenación de términos algebraicos. La concatenación en aritmética denota adición, por ejemplo 45 significa 40 + 5; sin embargo en álgebra se refiere a la multiplicación, por ejemplo 5b es 5 x b, lo que confunde a los alumnos.
Conjunción de términos no semejantes. En álgebra los términos diferentes deben tratarse en forma independiente, es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo: 3 + 5x= 8x.
Inversión incorrecta de operaciones. Los alumnos desconocen el procedimiento que lleva a la transposición de términos en una ecuación, además la realizan con una regla incorrecta.
Diferenciación de la incógnita y de su coeficiente. Decodifican a x como x^1, ante la expresión x + x =, el estudiante comete el error de sumar los coeficientes en lugar de las "x" y resuelven $x + x = x^2$.

Tradicionalmente se ha tratado de atender a estas dificultades enseñando a los alumnos a resolver problemas en tres pasos: Primero aprenden las ideas, requisitos y habilidades en situaciones descontextualizadas, luego aprenden procedimientos al margen de la solución de problemas y finalmente (y si el tiempo lo permite) en supuestos problemas de la "vida real" donde además se requieren conocimientos adicionales. Como alternativa se propone que desde el principio los alumnos resuelvan problemas a partir de sus modelos (dibujos, diagramas) que les permitan una interpretación significativa. El proceso de solución de problemas así será visto como resultado de la evolución en los conocimientos de los alumnos y no pensado como una situación de todo o nada (Lesh y Doerr, 2002).

Los modelos de los alumnos revelan su interpretación de los problemas (adecuadas o inadecuadas), de las cantidades que consideran relevantes, de las relaciones que son importantes, de las reglas que creen que gobierna las operaciones (Lesh y Doerr, 2002). Estos modelos juegan un papel central en la comprensión del álgebra pues pueden constituir un puente hacia la comprensión de los aspectos conceptuales implicados en la comprensión de un problema y su consecuente solución mediante una ecuación. (Flores, 2005)

Considerando los antecedentes anteriores se propone un programa para apoyar el paso de la aritmética al álgebra basado en el empleo de modelos gráficos que propicien interpretaciones significativas de problemas algebraicos en alumnos con bajo rendimiento en matemáticas.

MÉTODO

Participaron 12 alumnos de un programa de apoyo para alumnos con bajo rendimiento (Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria, PAES).

Se utilizó un diseño cuasi-experimental pretest- postest con grupo control. El grupo experimental (seis alumnos) participó en el programa de álgebra y el control (seis alumnos) continuó con sus actividades en el PAES. Los alumnos se asignaron considerando su disponibilidad de tiempo.

Procedimiento

En la pre-evaluación se analizó el tipo de solución que los alumnos de los grupos emplearon para resolver 9 problemas de tipo algebraico seleccionados de su libro de texto, con distinto grado de dificultad (ver anexo 1). La evaluación se realizó de forma individual, sin límite de tiempo.

Se desarrollaron 10 sesiones de 50 minutos de duración. Los alumnos practicaron problemas correspondientes a diversas situaciones. Emplearon lápiz, papel y el tablero de fichas para modelar. En términos generales la intervención se conformó de tres fases.

Fase 1. Asignación de alumnos a los grupos y pre evaluación

Fase 2. Aplicación del programa. En cada sesión se resolvía un problema, para que los alumnos aprendieran a representar el problema mediante ecuaciones, se empleó un modelo propuesto por Pizón y Gallardo (2000) que se adaptó para hacerlo significativo para los alumnos. Así mismo, considerando sus dificultades para estructurar sus acciones, se apoyó el aprendizaje con una estrategia de solución de problemas (ver anexo 2). Para modelar las relaciones en una ecuación de dos miembros, se empleó un tablero (rectángulo de 65 cm. por 41 cm. dividido en dos partes iguales, lado izquierdo, lado derecho, con un signo igual en medio) y fichas que representan los elementos de la ecuación de la siguiente manera:

△ Representa una incógnita con signo positivo

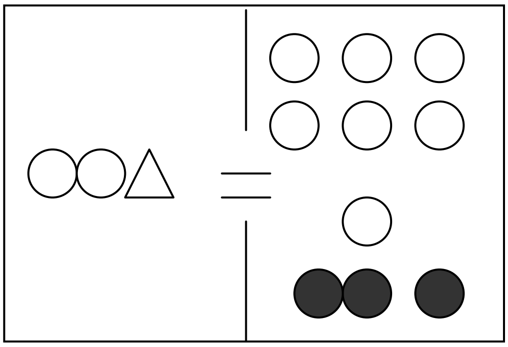
▲ Representa una incógnita con signo negativo

○ Representa la unidad con valor positivo

● Representa la unidad con valor negativo.

Un ejemplo de cómo modelar una ecuación por medio del tablero es el siguiente:

2x = 7 – 3



Al trabajar en el tablero los alumnos aprendieron que:

- Para despejar la incógnita se aplica un valor inverso en ambos miembros e una igualdad, esta se mantiene pero los miembros se modifican, usualmente sólo se dice a los alumnos por ejemplo, “si esta sumando pasa restando” lo que dificulta comprender el procedimiento en la ecuación. En le modelo, al pasar una ficha de un lado a otro de la ecuación cambia de color, lo que simula el cambio al signo que implica la operación inversa.
- En el caso de la multiplicación o división, el cambio a la operación inversa se representó señalando que cuando la literal y la incógnita están juntas, se indica una multiplicación y que la ecuación se transforma agregando a ambos lados de la igualdad el inverso correspondiente. La división que se representó separando el dividendo y el divisor con una barra del mismo material que las fichas.
- Para representar la anulación entre términos emplearon dos fichas de la misma figura y diferente color, colocadas en el mismo lado de la ecuación.

Para aprovechar la riqueza de la interacción social durante el aprendizaje y facilitar la adopción de la estrategia de solución de problemas se adaptó la metodología de enseñanza recíproca (Pallincsar y Brown, 1985) en la que se distribuyen diferentes actividades en el grupo para dar en conjunto una solución.

Una sesión típica iniciaba leyendo el problema y discutiendo de qué trataba, los alumnos procedían a resolverlo con su propio modelo de solución, algunos alumnos lo resolvían con dibujos (palitos y bolitas), y otros de forma aritmética, posteriormente se utilizaba el modelo propuesto (tablero de fichas) para generar la ecuación y resolverla. El grupo representaba la solución por medio del tablero, y a la par el tutor junto con los alumnos escribían en el pizarrón la ecuación algebraica conforme a lo que se realizaba en el tablero, esto con el fin de que los alumnos comprendieran la ecuación haciendo un vínculo con lo que realizaban en el modelo. Gradualmente los alumnos tomaron el control y la responsabilidad completa en la solución del problema.

Fase 3. Post - evaluación de los grupos: Ambos grupos resolvieron los mismos problemas presentados en la pre-evaluación. Algunos de los alumnos del grupo experimental pidieron usar el tablero, lo que se les permitió.

RESULTADOS

Para realizar el análisis de las soluciones de los alumnos, se adaptó la propuesta de Flores (2005) para identificar los niveles de conocimiento. Estas categorías fueron:

1. *No canónica.* En esta solución, el alumno aplica su conocimiento de una clase de problema que no corresponde al que se le plantea.
2. *No algorítmica.* En la solución generalmente se modela, mediante objetos o marcas gráficas, los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en el problema.
3. *Aritmética.* La solución se basa en las operaciones aritméticas.
4. *Algebraica con modelo.* Se representan el problema mediante una ecuación y se calcula el valor de la incógnita tomando el modelo como apoyo.
5. *Algebraica.* El alumno representa el problema mediante una ecuación
6. *No Solucionó.* El alumno no intenta una solución y deja sin resolver el problema.

Tabla 1. . Porcentaje de alumnos del grupo experimental que respondieron los problemas* en la pre y post evaluación en cada categoría.

Tipo de solución		Problemas								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aritmética	*Pre*	*100*	*100*	*100*	*100*	*33.33*	*100*	*100*	*100*	
	Post		**16.66**	**16.66**			**16.66**		**16.66**	
Algebraica con modelo	*Pre*									
	Post	**33.33**	**16.66**	**33.33**	**33.33**		**16.66**	**33.33**	**33.33**	**16.66**
Algebraica	*Pre*									
	Post	**66.66**	**66.66**	**33.33**	**66.66**	**66.66**	**66.66**	**66.66**	**66.66**	**81.33**
No solucionó	*Pre*					*66.66*				*100*
	Post					**33.33**				

* El número de problema corresponde a la lista que se presenta en el anexo 1

Tabla 2. Porcentaje de alumnos del grupo control que respondieron los problemas* en la pre y post evaluación en cada categoría.

Tipo de Solución		Problemas								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
No canónica	*Pre*									
	Post						**16.66**			
No Algorítmica	*Pre*									
	Post				**16.66**	**16.66**	**33.33**			
Aritmética	*Pre*	*83.33*	*50*	*50*	*50*	*16.66*	*50*	*16.66*	*83.33*	
	Post	**50**	**66.66**	**81.33**	**33.33**	**33.33**	**50**	**66.66**	**66.66**	
Algebraica con Modelo	*Pre*									
	Post									
Algebraica	*Pre*									*33.33*
	Post									**66.66**
No solucionó	*Pre*	16.66	50	50	50	83.33	50	83.33	16.66	66.66
	Post	**50**	**33.33**	**16.66**	**50**	**50**		**33.33**	**33.33**	**33.33**

- El número de problema corresponde a la lista que se presenta en el anexo

En las tablas 1 y 2 se observan las diferencias en la solución de los alumnos del grupo control y experimental en la post evaluación. Si bien se observa una evolución en las soluciones de ambos grupos, las soluciones del grupo experimental muestran mayores cambios, aunque no todos los alumnos del grupo experimental llegan a hacer una representación mediante una ecuación algebraica y que recurren a la solución aritmética.

CONCLUSIONES

Las diferencias en las soluciones del grupo experimental, evidencian que la comprensión de las demandas involucradas en una representación algebraica es un proceso evolutivo a largo plazo. En las soluciones de los diversos problemas, se lograron identificar las transiciones entre las representaciones, se observó entre la pre evaluación a la post evaluación, el paso de representaciones aritméticas a representaciones algebraicas, o de representaciones no canónicas a representaciones aritméticas.

Con base en los resultados obtenidos, se pudo analizar, de acuerdo con Flores (2002) que la construcción de una representación de un determinado problema se inicia cuando al comprender un alumno un problema lo representa poniendo en juego los conocimientos ya existentes o construye otros nuevos. El tipo solución que un alumno utiliza depende en gran medida de sus modelos, estos juegan un papel central en la comprensión del álgebra pues pueden constituir un puente hacia la comprensión de los aspectos conceptuales implicados en la representación de un problema y su consecuente solución mediante una ecuación (Flores, 2005)

Vergnaud (1990) señala que las diferencias entre una solución algebraica y una aritmética son complejas pues la primera requiere una representación simbólica con letras de las relaciones expresadas en el problema para generar una ecuación y resolver la incógnita. Por esta razón consideramos que es muy importante que los alumnos cuenten con la posibilidad de modelar un problema lo que les permita tomar conciencia de las similitudes y diferencias entre ambas formas de solución.

REFERENCIAS

Álcala, M (2002). *La construcción del lenguaje matemático.* México: Grao

Flores, M. R. C. (2002). El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación. Aguascalientes:Universidad Autónoma de Aguascalientes..

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática 17, 2, 7 -34*

Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). EL aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias.* 7(3), 229 - 240

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of algebra and function. En T. Nunes y P. Bryant (Eds..) *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (133 – 157). East Sussex UK: Psychology Press.

Lesh, R. y Doerr, H. (2002). *Beyond constructivism, models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching.* USA: Lawrence Erlbaum associates, Inc.

Mac. Gregor, M. y Stacey, K (2000). Incógnitas con valores cambiantes y múltiples referentes en el álgebra de los alumnos. *Educación matemática.* 12(3), 30 - 40.

Pizón, M. y Gallardo, A. (2000). Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. *Educación matemática*, 12(2), 81 – 96.

Pallincsar, A. S. y Brown, A. L. (1985). Reciprocal teaching of comprehension fostering and monitoring activities. *Cognition and Instruction*, 1, 117 – 175.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En J. Kilpatrick y P. Nesher (eds.) *Matheamtics and cognition* (pp 14 – 30). Cambridge: University Press.

1

Anexo 1

Problemas.

1. MONEDAS.

Andrés tenía en su mochila 8 monedas del mismo valor, además, su hermano con motivo de su cumpleaños, le da \$19. En total Andrés tiene ahora en su mochila \$59. Ahora necesita saber el valor de las monedas que tenía al principio.

2. CONVIVIO.

Josué tiene \$15 más que César y juntos tienen \$48 para hacer un convivio. Necesitan saber cuánto aporta cada uno para dicho convivio.

3. EXCURSIÓN.

Jennifer y sus compañeros de la escuela realizaron una excursión al Ajusco que se encuentra a 37 Km. De la ciudad de México. Cuando habían recorrido 13 Km. el autobús se descompuso y planearon seguir a pie, pero necesitan calcular lo que tendrán que caminar.

4. BOLIGRAFOS

Sabiendo que todos los bolígrafos valen igual, calcula el precio de cada uno si por la compra de 3 azules, 10 rojos, y 7 negros pagas \$60. Y calcula cuánto se gasta en los bolígrafos de cada color.

5. NÚMERO

Cinco veces un número menos su doble es igual a 42, ¿cuál es el número?

6. SUELDO

El sueldo fijo de Raúl es \$20 por semana además, él gana \$2 por cada hora de tiempo extra que trabaja. Esta semana trabajó 8 horas extra y quiere saber cuánto ganará para que no lo hagan “guaje”.

7. CANARIOS

El papá de Carlos, que es aficionado a los pájaros, tenía en su casa 8 jaulas con canarios, en cada jaula había siete canarios. Pero a Carlos le daban pena y un día les abrió la puerta de la jaula para que vivieran libres, los canarios se escaparon y se fueron volando a un árbol cercano. El papá quiere seguir alimentándolos y necesita conocer los canarios que se fueron al árbol.

8. FLORES.

Por ser el cumpleaños de Mónica, sus tres amigas le regalaron un ramo con el mismo número de flores. Cristina le regalo un ramo de rosas, Rosy otro de claveles y Elizabeth uno de alcatraces. Con ellas Mónica formó un gran ramo de 36 flores, pero necesita saber la cantidad de flores da cada tipo que tenía su ramo.

9. AMIGOS

Para ir a Six Flags, siete amigos necesitan \$525 y acuerdan poner la misma cantidad de dinero, tú quieres ir con 6 amigos. ¿Cuánto pondrá cada quien para juntar la misma cantidad

Anexo 2. Componentes de la estrategia de solución de problemas.

PASOS DE LA ESTRATEGIA	ACCIONES	AUTOINSTRUCCIONES
ANÁLISIS Y PLANIFICACIÓN	1. LEER	LEO EL PROBLEMA
	2. EXPRESAR LO QUE SE COMPRENDIÓ DEL PROBLEMA	LO PLATICO
	3. IDENTIFICAR LA INTERROGANTE	DIGO LA PREGUNTA
	4. IDENTIFICAR LOS DATOS NUMÉRICOS QUE SE EMPLEARÁN EN LA SOLUCIÓN	BUSCO LOS DATOS
EJECUCIÓN Y MONITOREO DE LA SOLUCIÓN	5. MODELAR EL PROBLEMA EN EL TABLERO.	REPRESENTO LA ECUACION CON LAS FICHAS.
	6. SOLUCIONARLO	POR MEDIO DEL TABLERO BUSCO MI SOLUCIÓN.
	7. VINCULAR LA REPRESENTACIÓN DEL TABLERO CON LA ECUACIÓN ESCRITA	CON APOYO DEL TABLERO ESCRIBO MI ECUACIÓN.
	8. REALIZAR LA ECUACIÓN	ESCRIBO
		RESUELVO
EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN	9. COMPROBAR LA ECUACIÓN.	COMPRUEBO MI OPERACIÓN
	10. COMPROBAR LA CORRESPONDENCIA ENTRE RESULTADO Y PREGUNTA	COMPRUEBO MI RESULTADO
	11. REDACTAR EL RESULTADO RELACIONÁNDOLO CON LA INTERROGANTE	ESCRIBO COMPLETA LA RESPUESTA